Tragwerkslehre 1

05 Fachwerke

INHALT

Eigenschaften von Fachwerken

Tragverhalten von Fachwerkträgern

Knotenausbildung

Bildung von Fachwerken

Analyse von Fachwerken

Analogie zu Bogen-Seil-Tragwerken

Parallelgurtige Fachwerktypen

Nicht-parallelgurtige Fachwerktypen

Konsolen als Fachwerk

Räumliche Fachwerke

Auflagerkräfte von teilauskragenden Bauteilen

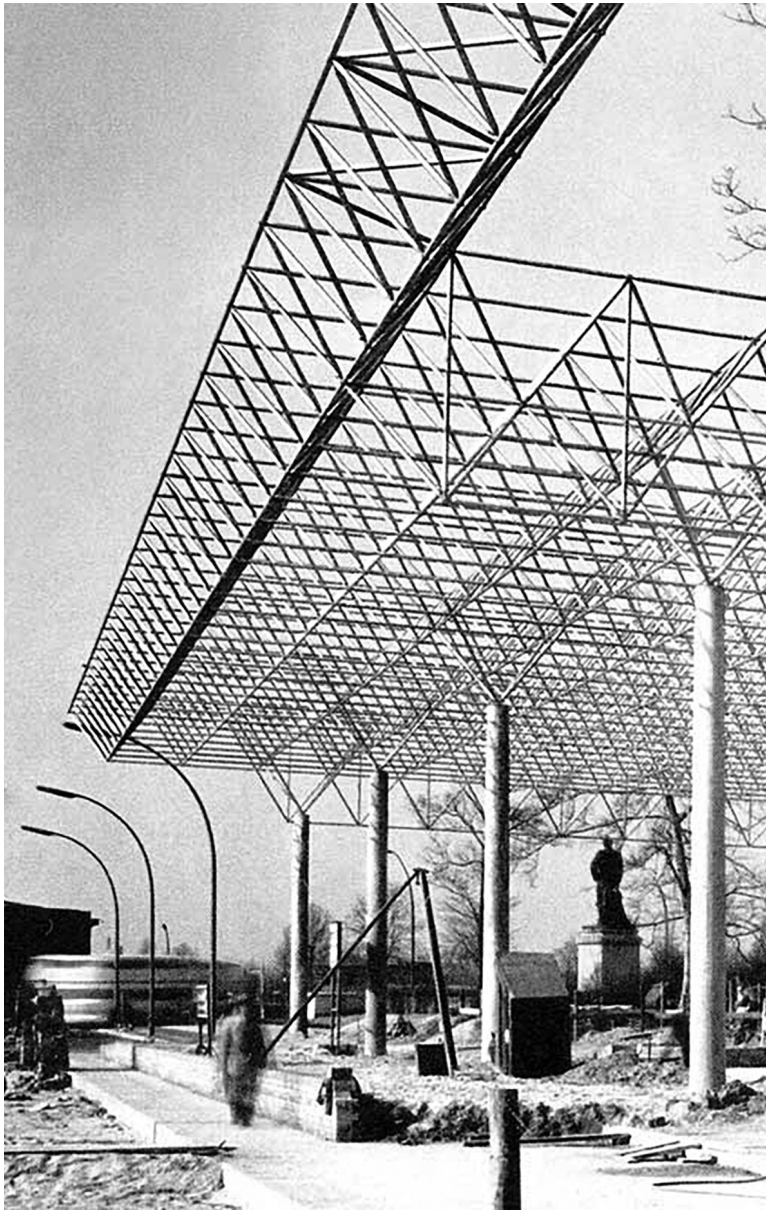
Analyse eines Fachwerks mit Auskragung

Eigenschaften von Fachwerken

EIGENSCHAFTEN VON FACHWERKEN



Centre Georges Pompidou | Paris | Renzo Piano und Richard Rogers (Arch.); Peter Rice und Ove Arup (Ing.) | 1977
(Fachwerkträger)



Deutscher Pavillon «Die Stadt von morgen» an der Interbau | Berlin | Karl Otto, Frei Otto und Günther Günschel (Arch.); Max Mengeringhausen (Ing.) | 1957 (Raumfachwerk)

Quelle: links: URL https://www.admagazine.fr/adadresses?page=243, Zugriff am 16.09.2025
rechts: URL https://hansaviertel.berlin/interbau-1957/die-stadt-von-morgen/, Zugriff am 25.11.2025



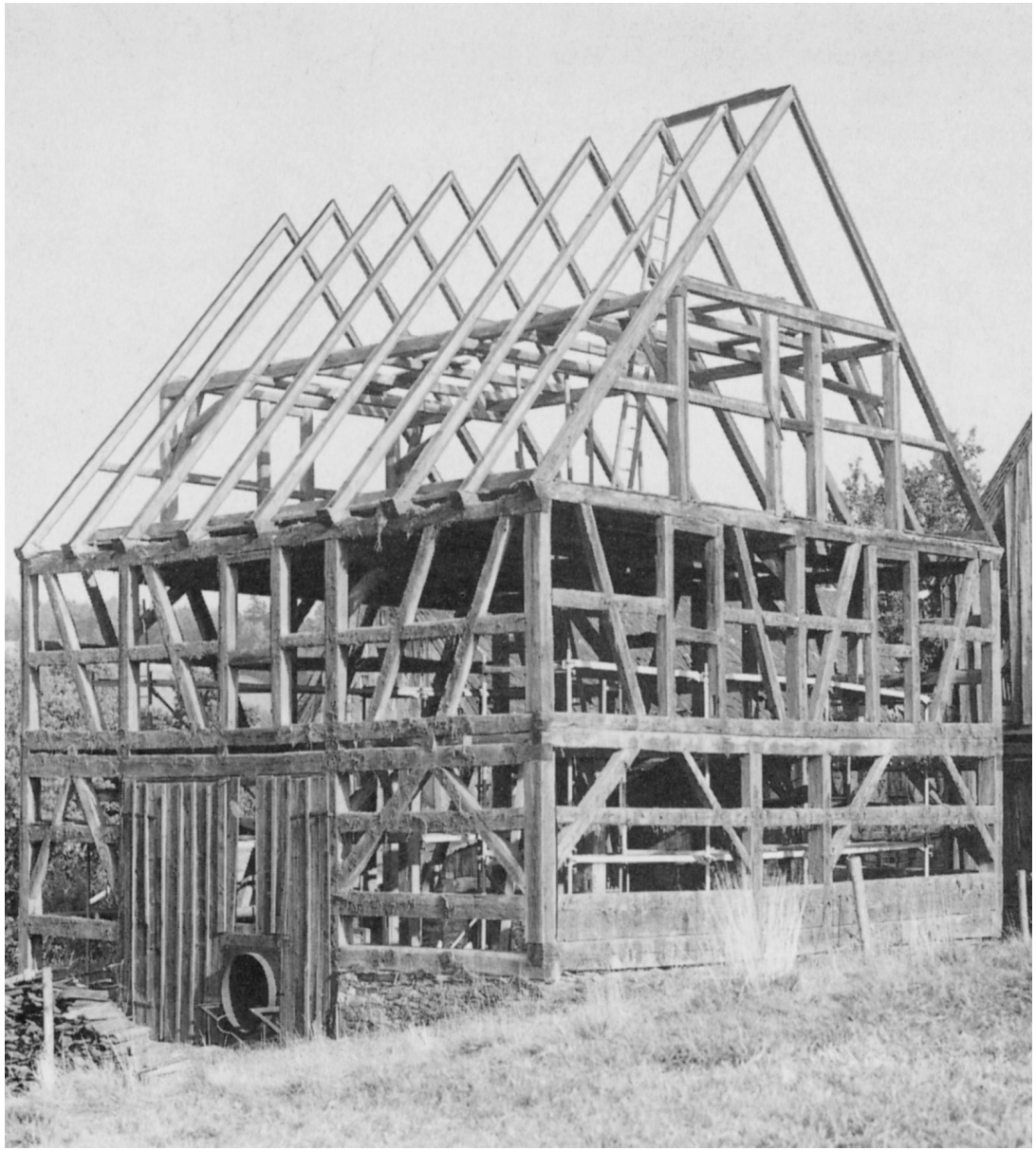
Traggerüst des «Leigh Road Gasbehälters» | London
(Verbände zur Stabilisierung gegen Horizontallasten)



Bank of China Tower | Hongkong | Ieoh Ming Pei (Arch.); Leslie Earl Robertson (Ing.) | 1990 (Fachwerk-struktur zur Stabilisierung gegen Horizontallasten)

Quelle: links: URL https://www.dezeen.com/2019/12/10/gas-holders-uk-photography-richard-chivers/, Zugriff am 25.11.2025
rechts: URL https://architecturetoday.co.uk/still-standing-bank-of-china-tower/, Zugriff am 25.11.2025

EIGENSCHAFTEN VON FACHWERKEN



Tragwerk eines Gebäudes in Fachwerkbauweise (Riegelbauweise)



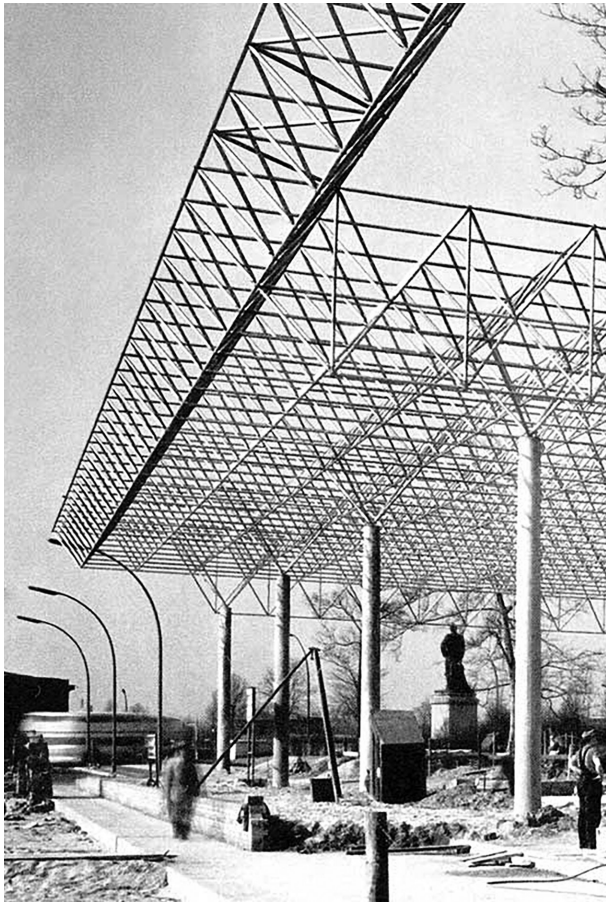
Zimmerei LOT Holzbau | Feldkirch | Walter Unterrainer (Arch.); merz kley partner (Ing.) | 2000
(Verbände zur Stabilisierung gegen Horizontallasten)

Strukturprinzip

- Fachwerke sind Tragwerke die aus stabförmigen Bauteilen zusammengesetzt sind.
- Geometrisch basiert diese Stabstruktur auf Dreiecken.
- Die Punkte in welchen die Stäbe miteinander verbunden sind heissen Knoten.



Fachwerkträger :
Centre Georges Pompidou | Paris



Raumfachwerk:
Deutscher Pavillon «Die Stadt von morgen» an der Interbau | Berlin



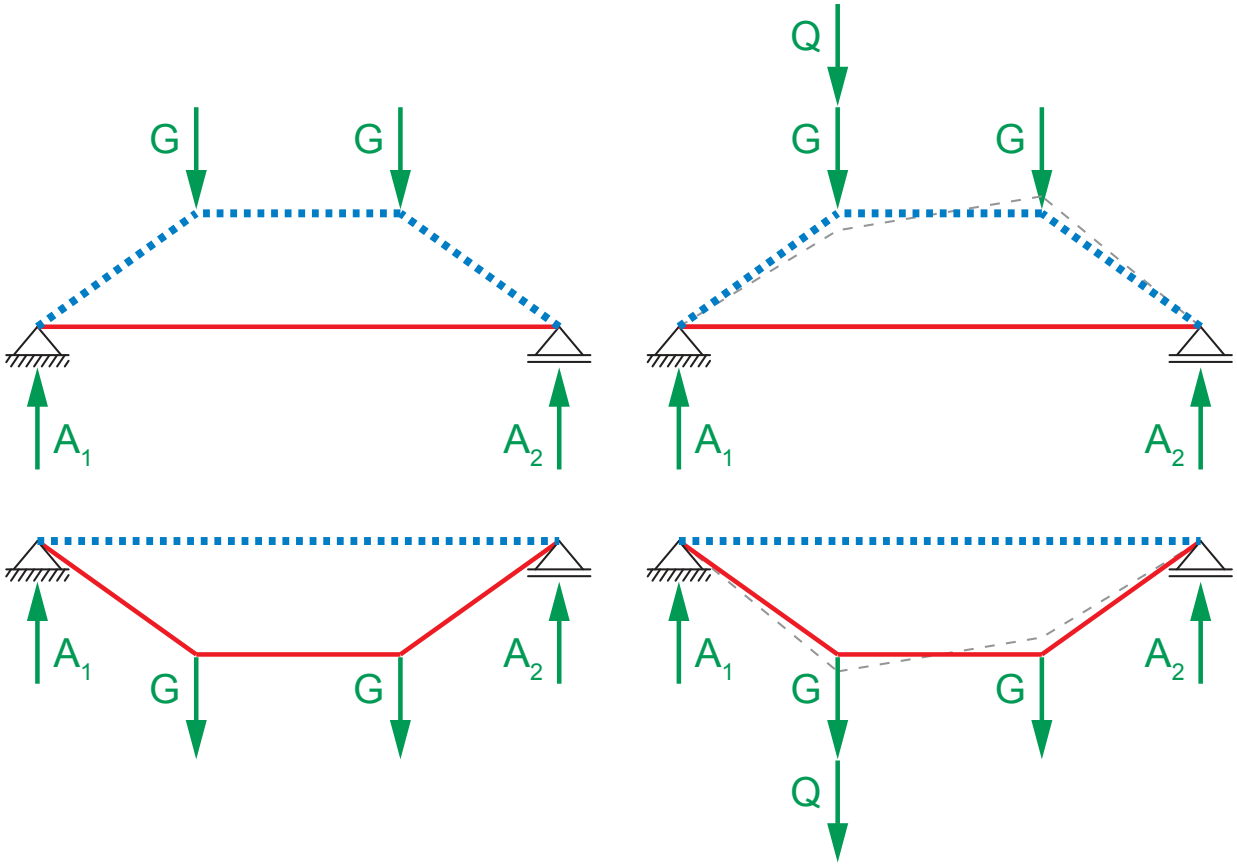
Fachwerkstruktur zur Stabilisierung gegen Horizontallasten:
Bank of China Tower | Hongkong

Quelle: links: URL https://www.admagazine.fr/adadresses?page=243, Zugriff am 16.09.2025
mittig: URL https://hansaviertel.berlin/interbau-1957/die-stadt-von-morgen/, Zugriff am 25.11.2025
rechts: URL https://architecturetoday.co.uk/still-standing-bank-of-china-tower/, Zugriff am 25.11.2025

Tragverhalten von Fachwerkträgern

Herleitung des Tragverhaltens von Fachwerken aus Bogen-Seil-Tragwerken

- Stützlinie mit Zugelement (obere Abbildungsreihe): unter einseitiger Nutzlast senkt sich das Bogentragwerk links ab und und hebt sich rechts an → Bogentragwerk wird instabil
- Seillinie mit Druckelement (untere Abbildungsreihe): unter einseitiger Nutzlast senkt sich das Seiltragwerk links ab und hebt sich rechts an → Seiltragwerk findet neue Form für Gleichgewicht



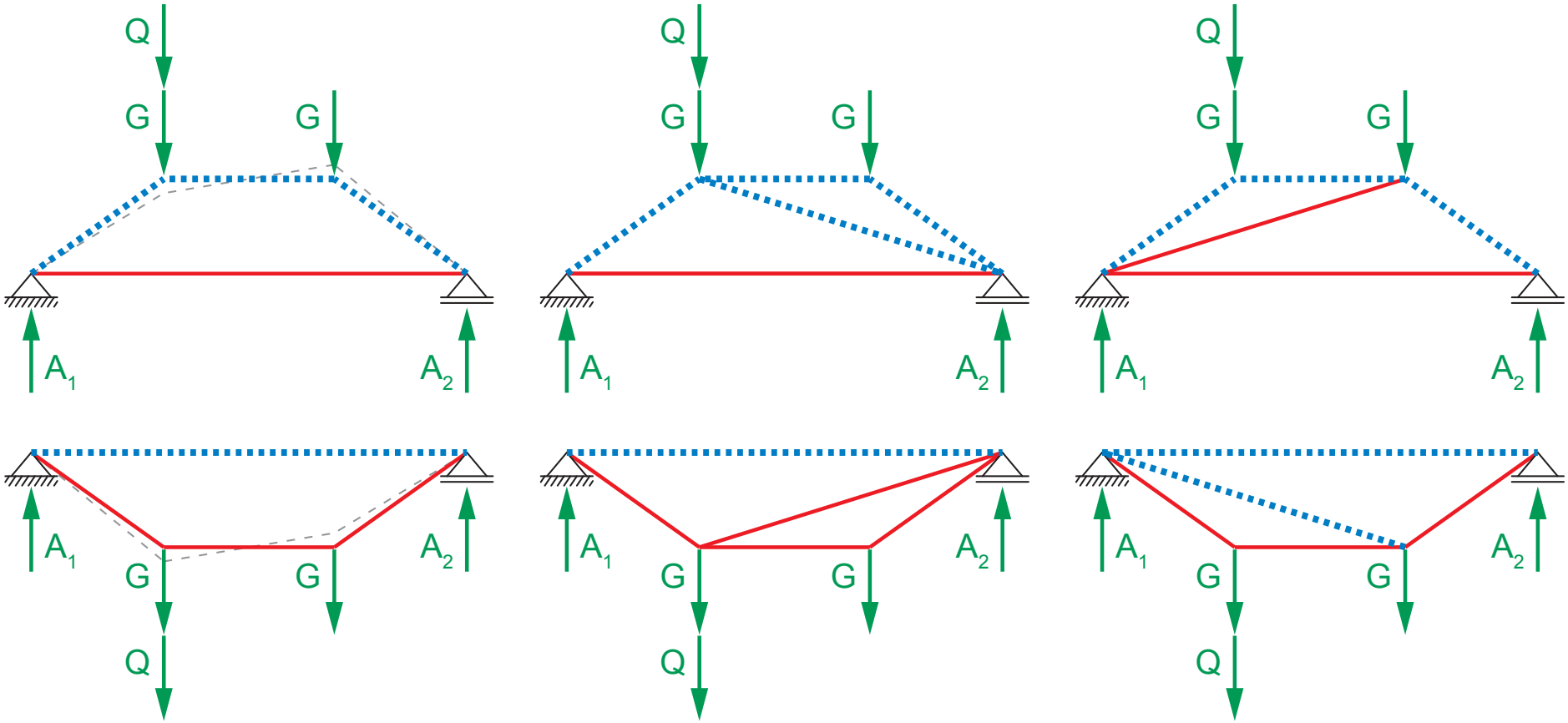
oben: Stützlinie im Gleichgewicht
unten: Seillinie im Gleichgewicht

oben: Bogentragwerk senkt sich links ab und und hebt sich rechts an → Bogentragwerk wird instabil
unten: Seiltragwerk senkt sich links ab und und hebt sich rechts an → Seiltragwerk findet neue Form für Gleichgewicht

Quelle: Autor

Herleitung des Tragverhaltens von Fachwerken aus Bogen-Seil-Tragwerken

- Stützlinie mit Zugelement (obere Abbildungsreihe): Zwei Möglichkeiten mit jeweils einem zusätzlichen Stab um eine Verformung des Bogens zu verhindern.
- Seillinie mit Druckelement (untere Abbildungsreihe): Zwei Möglichkeiten mit jeweils einem zusätzlichen Stab um eine Verformung des Seils zu verhindern.



oben: Bogen verformt sich
unten: Seil verformt sich

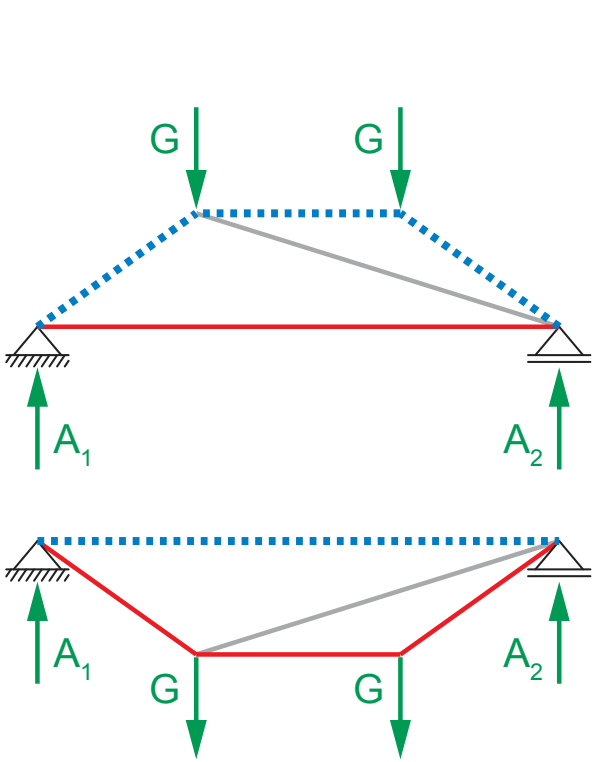
Jeweils Möglichkeit 1 eines zusätzlichen Stabs

Jeweils Möglichkeit 2 eines zusätzlichen Stabs

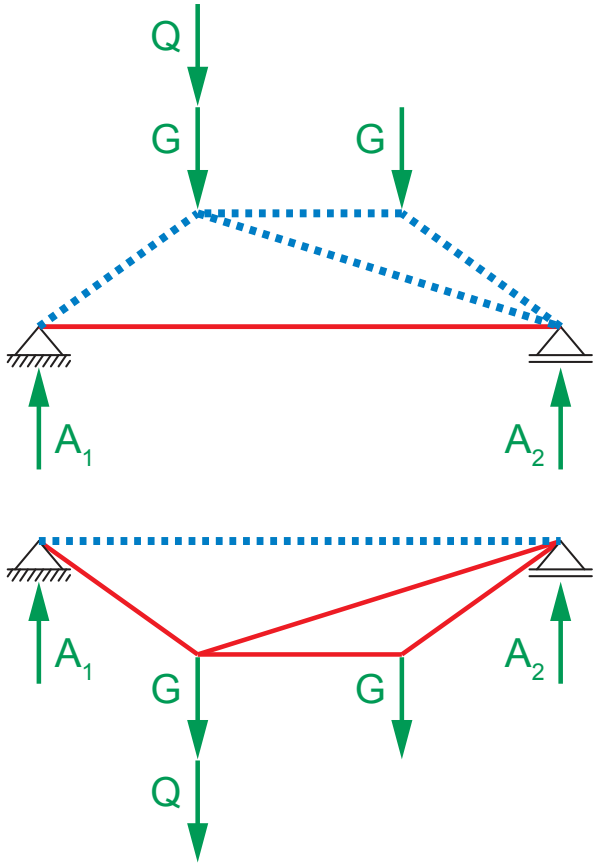
Quelle: Autor

Herleitung des Tragverhaltens von Fachwerken aus Bogen-Seil-Tragwerken

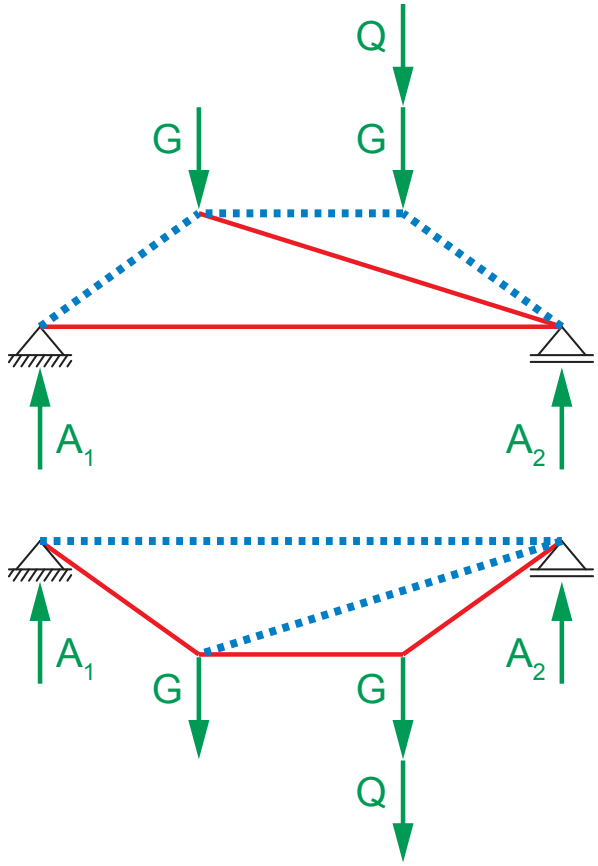
- Bogen-Seil-Tragwerk jeweils durch einen zusätzlichen Stab stabilisiert → Fachwerk
- Je nach einwirkender Kraft verändert sich die Kraft in den Stäben.
- Bei bestimmten Einwirkenden können Stäbe unbeansprucht (innere Kraft = 0) sein → solche Stäbe werden als Nullstäbe bezeichnet



oben: Stützlinie im Gleichgewicht
unten: Seillinie im Gleichgewicht



Lastfall 1:
oben: zusätzlicher Stab mit innerer Druckkraft
unten: zusätzlicher Stab mit innerer Zugkraft

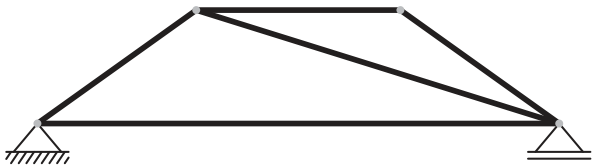


Lastfall 2:
oben: zusätzlicher Stab mit innerer Zugkraft
unten: zusätzlicher Stab mit innerer Druckkraft

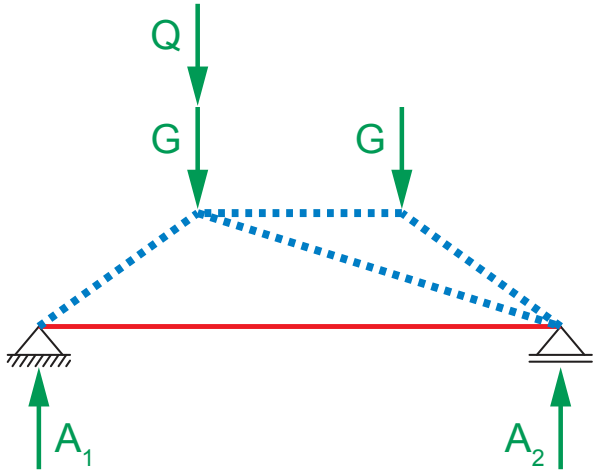
Quelle: Autor

Tragverhalten

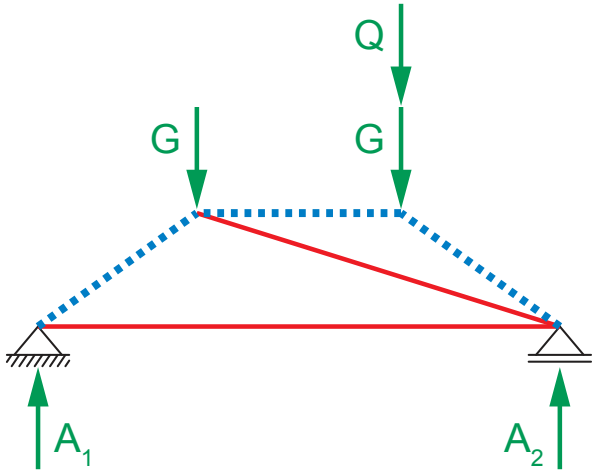
- Fachwerke sind stabilisierte Bogen-Seil-Tragwerke, die ihre Lasten über Zug und Druck abtragen.
- Die Form dieser Tragwerke muss sich nicht an Seil- oder Stützlinien infolge der äusseren Lasten orientieren.
- Fachwerke bestehen aus Stäben die in Knoten miteinander verbunden sind und Dreiecke bilden.
- Fachwerke sind in der Lage ohne Formänderung beliebige Konfigurationen von äusseren Lasten durch innere Zug- und Druckkräfte aufzunehmen.
- Die formale Freiheit beim Entwurf des Tragwerks ist grösser als bei Tragwerken welche auf Seil- oder Stützlinien basieren.



Fachwerk unbelastet



Fachwerk mit Lastfall 1



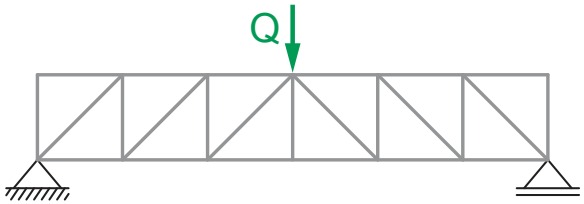
Fachwerk mit Lastfall 2

Quelle: Autor



Centre Georges Pompidou | Paris | Renzo Piano und Richard Rogers (Architekten); Peter Rice und Ove Arup (Ingenieure) | 1977
(Innenraum; Fachwerkträger mit Bezeichnungen der Elemente)

Lastabtrag eines Fachwerkträgers



Schematische Darstellung des unten abgebildeten Fachwerks
mit repräsentativer Einzellast für die Untersuchung des Lastabtrags





Josef-Dreier-Brücke | Weißenbach | Paul Nessler (Ingenieur) | 2022

Quelle: links: URL https://www.komoot.com/de-de/highlight/5956236, Zugriff am 28.11.2024
rechts: URL https://www.facebook.com/permalink.php?story_fbid=2234041763402068&id=134740412873250 7, Zugriff am 28.11.2024

Lastabtrag eines Fachwerkträgers

- Ausgangslage:
  - Zwei Auflager
  - Eine einwirkende Einzellast in Feldmitte



Last- und Auflagersituation

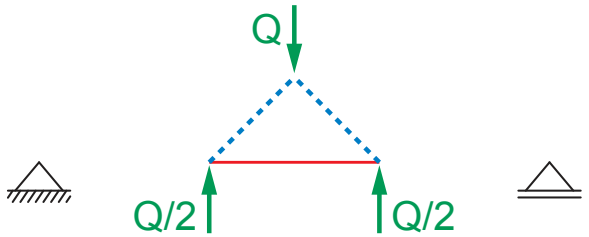
Quelle: Autor

Lastabtrag eines Fachwerkträgers (Variante 1)

- Ausbildung des ersten Schritts im Lastabtrag durch ein einfaches Bogen-Seil-Tragwerk (Subsystem 1) mit virtuellen Auflagern
  hier: Stützlinie mit Zugelement
- Stützlinie nicht zu flach geneigt, so dass die Druckkräfte nicht zu gross werden.



Last- und Auflagersituation



Subsystem 1

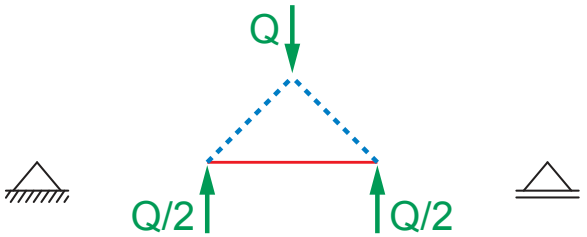
Quelle: Autor

Lastabtrag eines Fachwerkträgers (Variante 1)

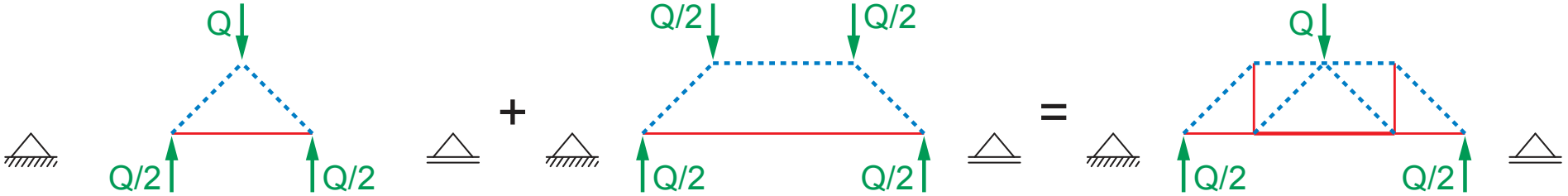
- Aufhängung der Auflagerkräfte aus Subsystem 1 an ein weiteres Bogen-Seil-Tragwerk (Subsystem 1.1) mit virtuellen Auflagern
  hier: Stützlinie mit Zugelement
- Subsystem 1 und Subsystem 1.1 werden superponiert, woraus Subsystem 2 resultiert



Last- und Auflagersituation



Subsystem 1



Subsystem 1 | Subsystem 1.1 | Subsystem 2 = Subsystem 1 + Subsystem 1.1

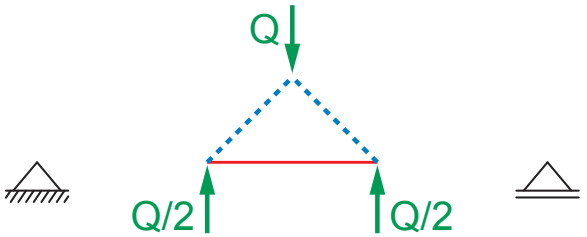
Quelle: Autor

Lastabtrag eines Fachwerkträgers (Variante 1)

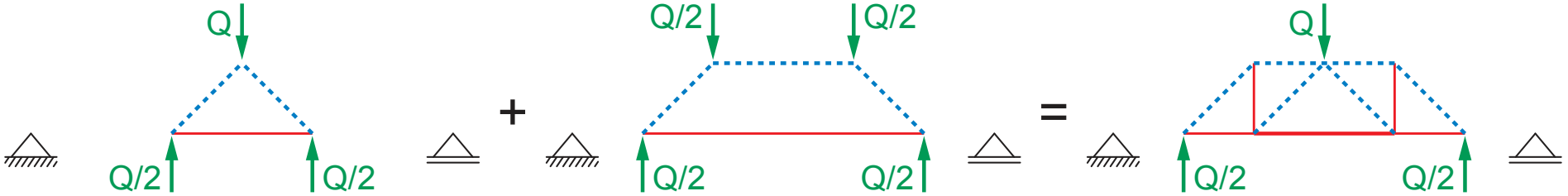
- Aufhängung der Auflagerkräfte aus Subsystem 2 an ein weiteres Bogen-Seil-Tragwerk (Subsystem 2.1), mit den reellen Auflagern
  hier: Stützlinie mit Zugelement
- Subsystem 2 und Subsystem 2.1 werden superponiert, woraus das Gesamtsystem eines Fachwerks resultiert.



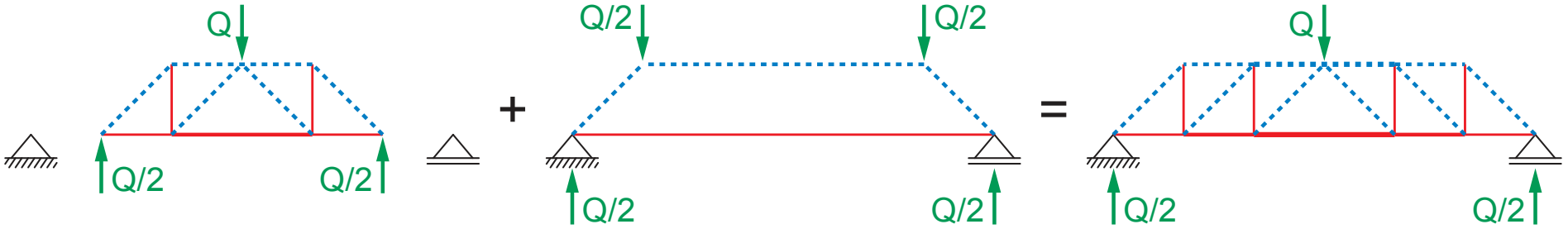
Last- und Auflagersituation



Subsystem 1



Subsystem 1 | Subsystem 1.1 | Subsystem 2 = Subsystem 1 + Subsystem 1.1



Subsystem 2 | Subsystem 2.1 | Gesamtsystem = Subsystem 2 + Subsystem 2.1

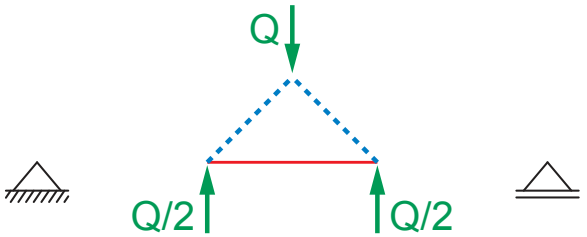
Quelle: Autor

Lastabtrag eines Fachwerkträgers (Variante 1)

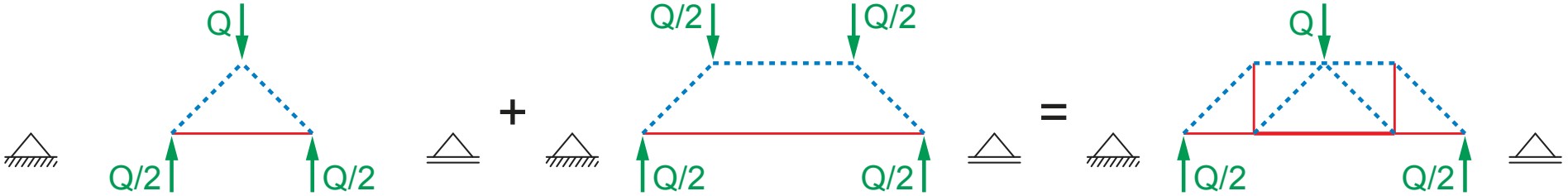
- Der Lastabtrag des Fachwerks resultiert aus der Überlagerung von Bogen-Seil-Tragwerken.
- Die einwirkende Last wird über vertikale und diagonale Stäbe zu den Auflagern «transportiert».
- Gurtkräfte entstehen aus Umlenkung der vertikalen Kräfte in die diagonalen Kräfte.



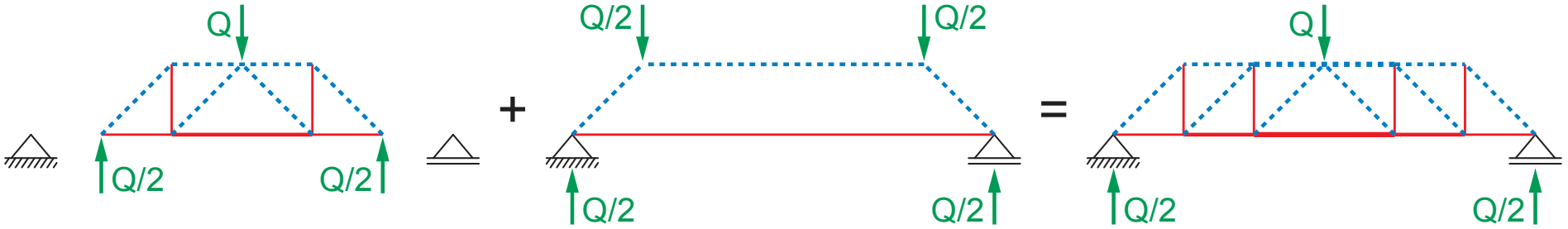
Last- und Auflagersituation



Subsystem 1



Subsystem 1 | Subsystem 1.1 | Subsystem 2 = Subsystem 1 + Subsystem 1.1



Subsystem 2 | Subsystem 2.1 | Gesamtsystem = Subsystem 2 + Subsystem 2.1

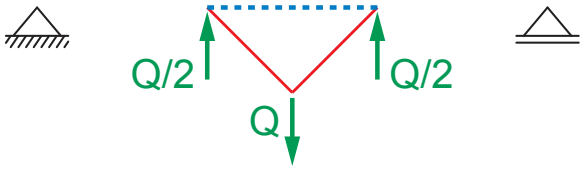
Quelle: Autor

Lastabtrag eines Fachwerkträgers (Variante 2)

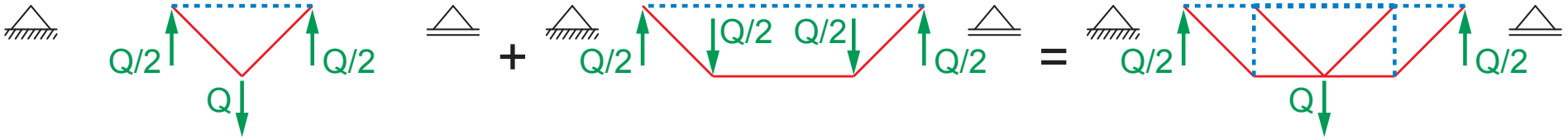
- Alternative Herleitung des Fachwerk-Lastabtrags aus der Überlagerung von Bogen-Seil-Tragwerken des Typs Seillinie mit Druckelement.



Fachwerkträger mit Last und Auflagern



Subsystem 1



Subsystem 1 | Subsystem 1.1 | Subsystem 2 = Subsystem 1 + Subsystem 1.1

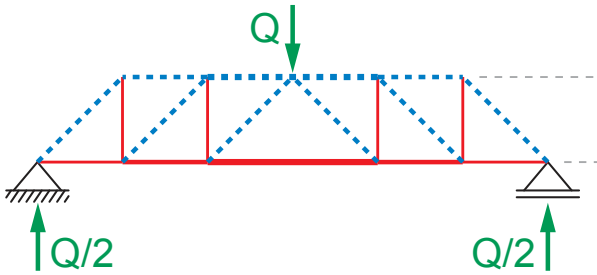


Subsystem 2 | Subsystem 2.1 | Gesamtsystem = Subsystem 2 + Subsystem 2.1

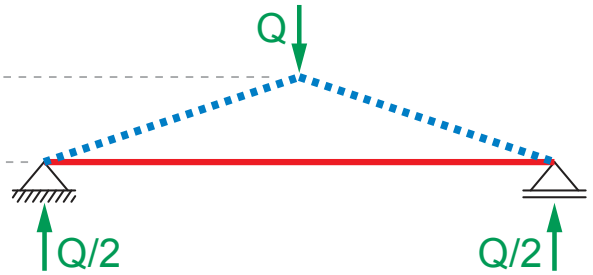
Quelle: Autor

Vergleich Fachwerk und Bogen-Seil-Tragwerk

- Im Fachwerk werden die Kräfte «flächiger» verteilt, weshalb hier die inneren Kräfte in vielen Stäben kleiner sind als jene des Bogen-Seil-Tragwerks.
- Beim Fachwerk sind die Kräfte in den Gurten abgestuft.

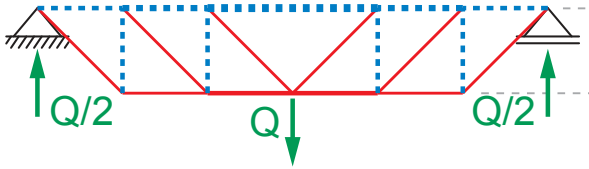


Fachwerk als Addition von Stützlinien mit Zugstab

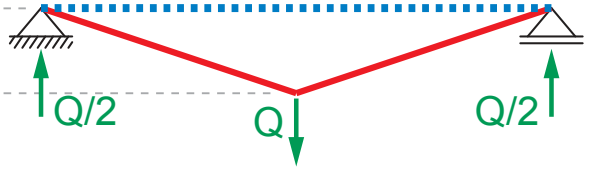


Äquivalentes Bogen-Seil-Tragwerk
Stützlinie mit Zugstab
(Pfeilhöhe ist gleich wie Höhe des Fachwerks)

Bogen-Seil-Tragwerk
- Druckkräfte sind grösser als im Fachwerk
- Zugkraft ist gleich gross wie jene in der Mitte des Fachwerks



Fachwerk als Addition von Seillinien mit Druckstab

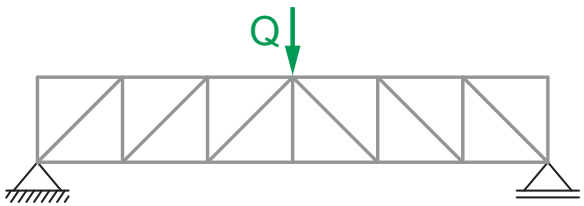


Äquivalentes Bogen-Seil-Tragwerk
Seillinie mit Druckstab
(Pfeilhöhe ist gleich wie Höhe des Fachwerks)

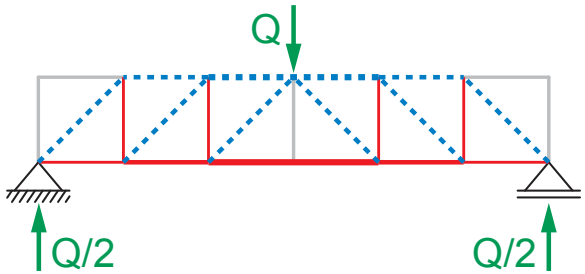
Bogen-Seil-Tragwerk
- Zugkräfte sind grösser als im Fachwerk
- Druckkraft ist gleich gross wie jene in der Mitte des Fachwerks

Quelle: Autor

Lastabtrag eines Fachwerkträgers



Schematische Darstellung des unten abgebildeten Fachwerks
mit repräsentativer Einzellast für die Untersuchung des Lastabtrags



Lastabtrag mit Zug- und Druckkräften
Grau: Stäbe ohne innere Kräfte → Nullstäbe



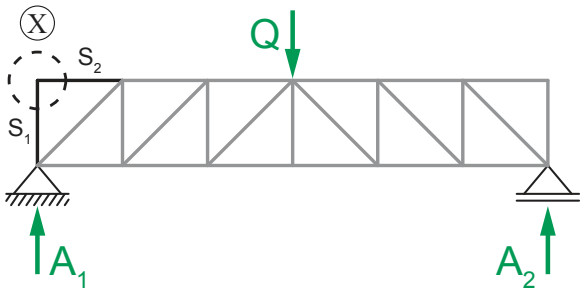


Josef-Dreier-Brücke | Weißenbach | Paul Nessler (Ingenieur) | 2022

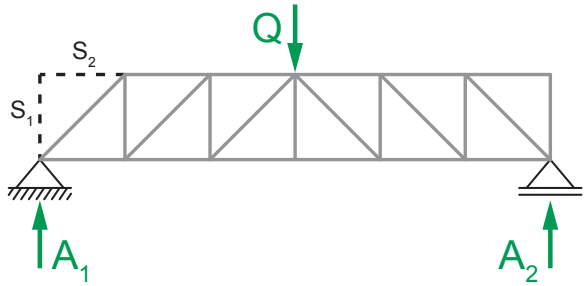
Quelle: links: URL https://www.komoot.com/de-de/highlight/5956236, Zugriff am 28.11.2024
rechts: URL https://www.facebook.com/permalink.php?story_fbid=2234041763402068&id=134740412873250 7, Zugriff am 28.11.2024

Einfaches Erkennen von Nullstäben

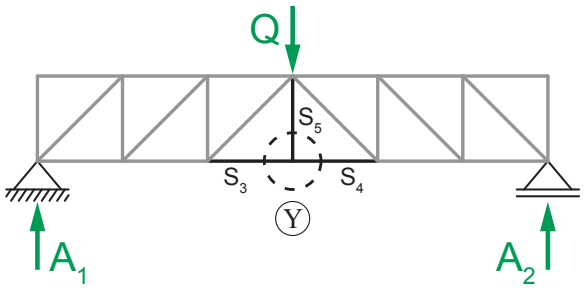
- <u>Fall 1:</u>
  Unbelasteter Knoten mit 2 anschliessenden Stäben
  → beides sind Nullstäbe
- <u>Fall 2:</u>
  Unbelasteter Knoten mit 3 anschliessenden Stäben, zwei liegen auf der selben Achse
  → der dritte ist ein Nullstab



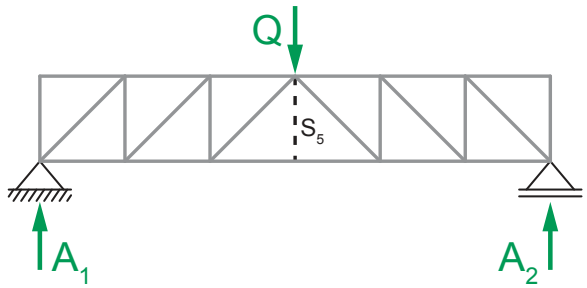
Unbelasteter Knoten X
mit 2 anschliessenden Stäben S_1 und S_2



Beide Stäbe S_1 und S_2 sind Nullstäbe



Unbelasteter Knoten Y
mit 3 anschliessenden Stäben S_3, S_4 und S_5.
S_3 und S_4 liegen auf der selben Achse



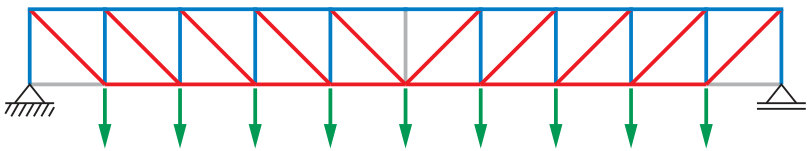
Stab S_5 ist Nullstab

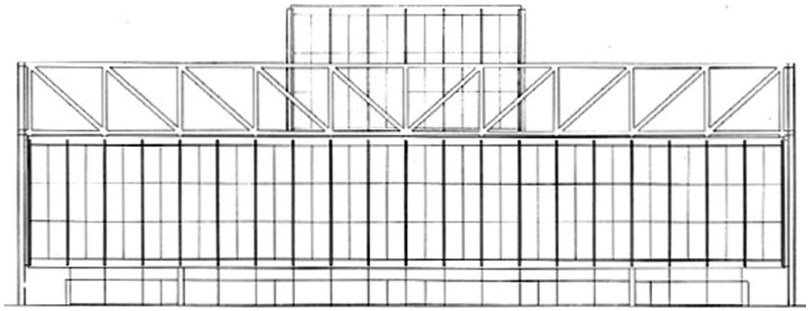
Quelle: Autor

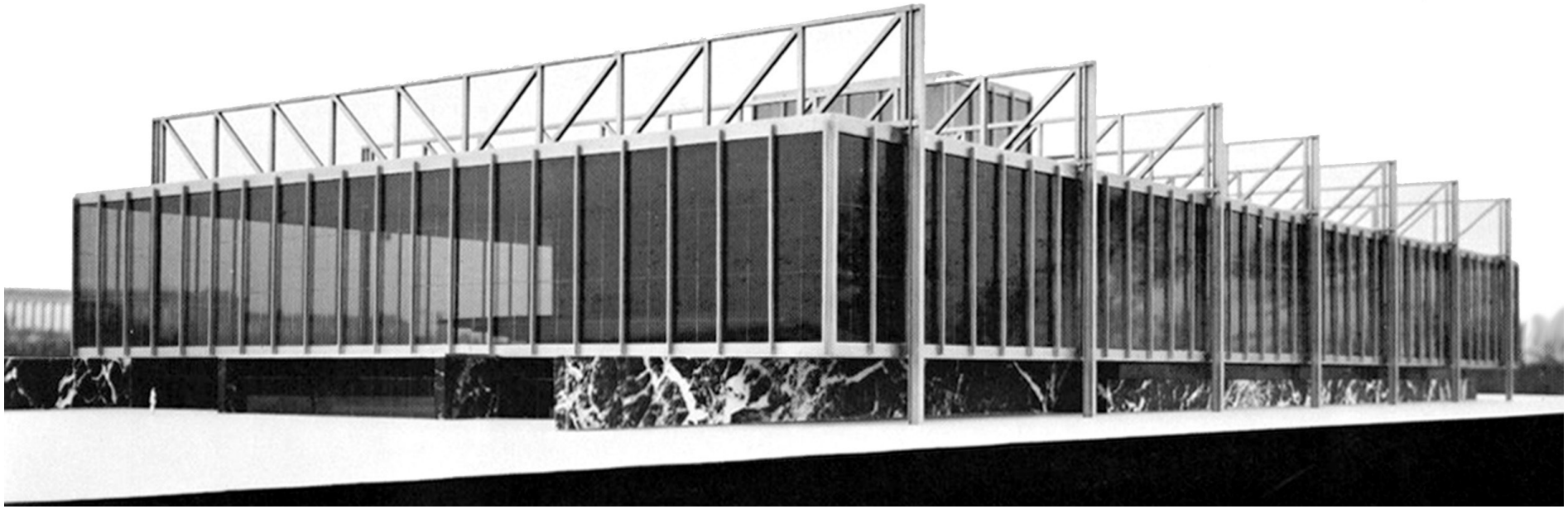
Knotenausbildung

Für Fachwerke gilt allgemein

- In jedem Stab wirkt je nach Last entweder eine Zugkraft (rot) oder eine Druckkraft (blau) oder keine Kraft (grau, «Nullstab»).
- Jede innere Kraft wirkt auf einer Stabachse (axiale innere Kraft). Dadurch sind die Stäbe durch eine konstante Spannung über den ganzen Querschnitt beansprucht (Normalkraftbeanspruchung).
- Die Stäbe sind nicht biegebeansprucht.





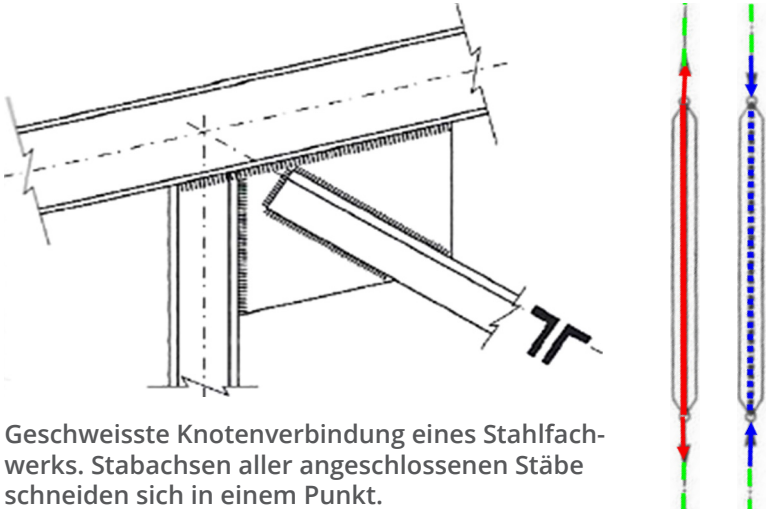


Nationaltheater Mannheim (Projekt) | Ludwig Mies van der Rohe (Architekt) | 1953
(Fachwerkträger: L = 80 m, h = 8 m, L/h = 10)

Damit in einem Fachwerk ausschliesslich axiale innere Kräfte wirken muss folgendes erfüllt sein:

- Alle Stäbe sind gerade.
- Einwirkende Lasten greifen in Knoten an.
- Die Auflager befinden sich ebenfalls in Knoten.
- Für die Knoten muss folgendes erfüllt sein:
  1) Verbindung ist so ausgeführt, dass sich die Achsen aller angeschlossenen Stäbe in einem Punkt schneiden.

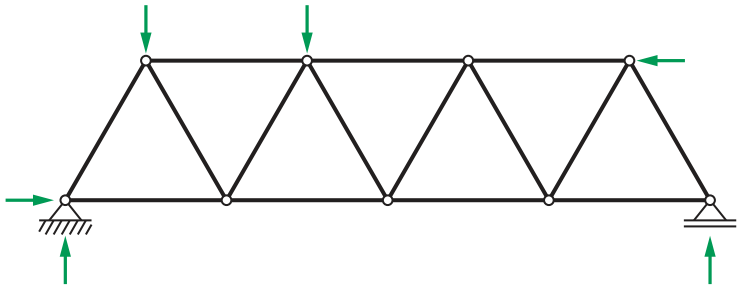
  ODER
  2) Verbindung ist konstruktiv gelenkig ausgeführt (echtes Gelenk oder Querschnittsverjüngung).
- Meist wird Variante (1) ausgeführt. Da diese für Fachwerke ein Quasi-Gelenk bedeutet wird im statischen System ein Gelenk gezeichnet.



Geschweisste Knotenverbindung eines Stahlfachwerks. Stabachsen aller angeschlossenen Stäbe schneiden sich in einem Punkt.

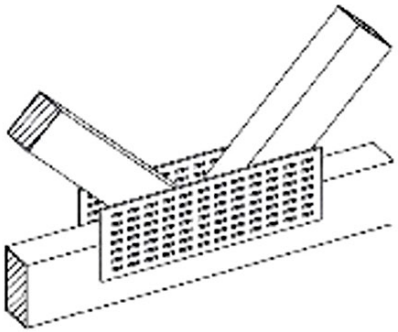


Strukturhalle Pilatus Flugzeugwerke | Stans | Strüby Konzept (Architekten); neue Holzbau AG (Ingenieure) | 2021

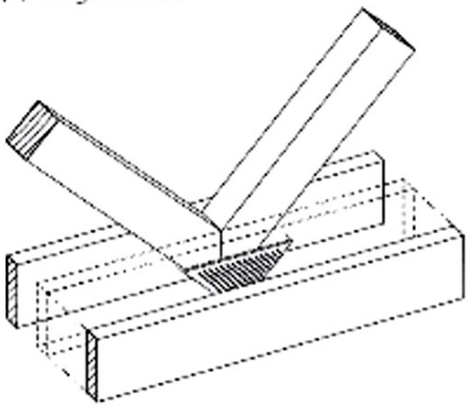


Statisches System eines Fachwerks
(Da sich die Stabachsen in den Knoten in einem Punkt treffen werden hier Gelenke gezeichnet, obwohl die Ausführung konstruktiv nicht unbedingt gelenkig sein muss.)

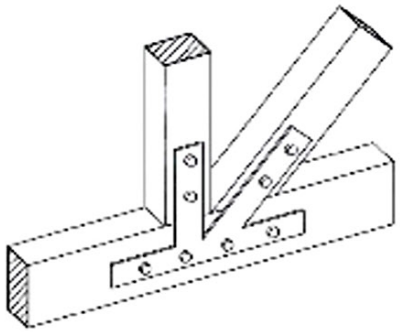
Beispiele für konstruktive Ausführunge von Fachwerkknoten im Holzbau



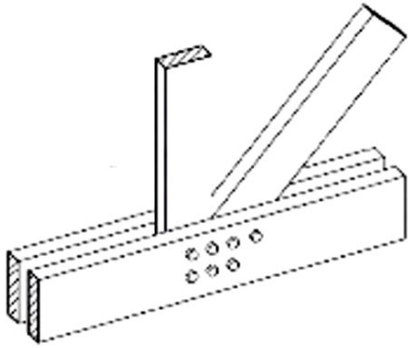
(a) Nageiblech



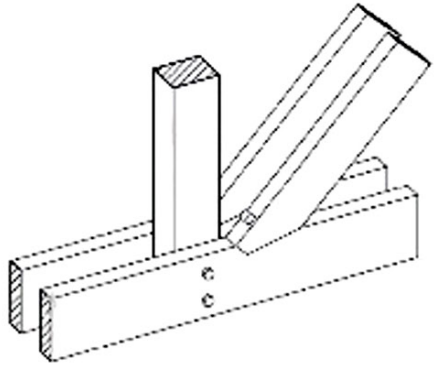
(b) Innenliegende Nageiplatte



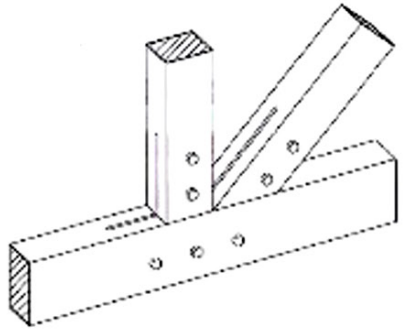
(c) Außenliegendes Knotenblech



(c) Schraubverbindung



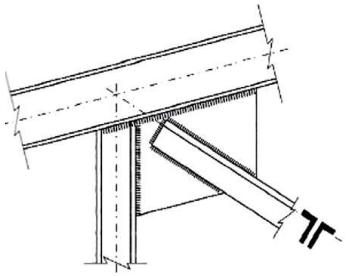
(e) Kombination von verschraubtem und zimmermannsmäßigem Knoten



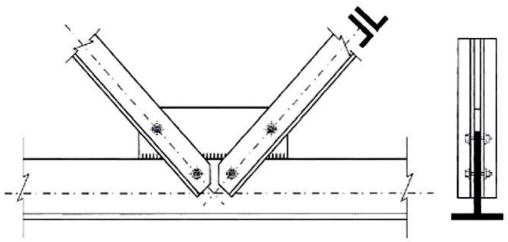
(f) Eingeschlitztes Knotenblech

Quelle: Block, Philippe; Gengnagel, Christoph; Peters, Stefan (2015): Faustformel Tragwerksentwurf. München: Deutsche Verlags-Anstalt

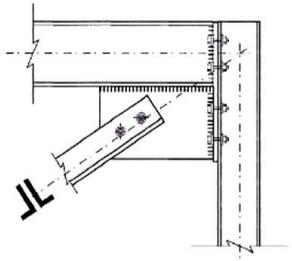
Beispiele für konstruktive Ausführunge von Fachwerkknoten im Stahlbau



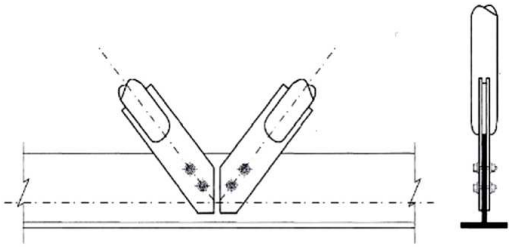
(g) Geschweißtes Knotenblech



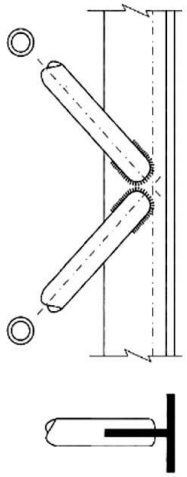
(j) L-Profile mit geschweißtem Knotenblech



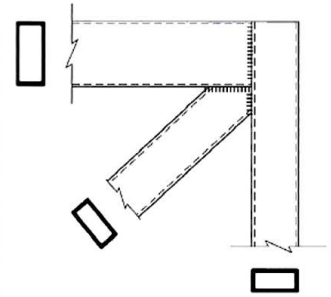
(h) Geschweißtes und geschraubtes Knotenblech



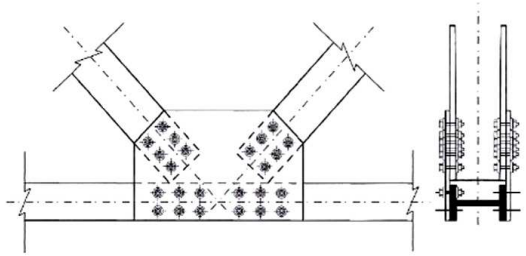
(k) Geschlitzte Rohre mit geschraubten Knotenbelechen



(m) Geschlitzte und geschweißte Hohlprofile



(i) Geschweißter Hohlprofilknoten



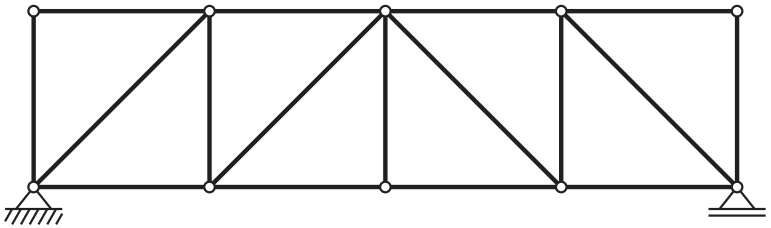
(l) Doppel-T-Profile mit geschraubtem Knotenblech

Quelle: Block, Philippe; Gengnagel, Christoph; Peters, Stefan (2015): Faustformel Tragwerksentwurf. München: Deutsche Verlags-Anstalt

Bildung von Fachwerken

Das statisch bestimmte Fachwerk

- Statische Bestimmtheit bedeutet:
  Innere Kräfte und Auflagerkräfte können mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen eindeutig bestimmt werden.
  → Es existiert nur eine Lösung



Statisch bestimmtes Fachwerk



Josef-Dreier-Brücke | Weißenbach | Paul Nessler (Ingenieur) | 2022



Quelle: oben: Autor
li. u.: URL https://www.komoot.com/de-de/highlight/5956236, Zugriff am 28.11.2024
re. u.: URL https://www.facebook.com/permalink.php?story_fbid=2234041763402068&id=134740412873250 7, Zugriff am 28.11.2024

Das statisch bestimmte Fachwerk

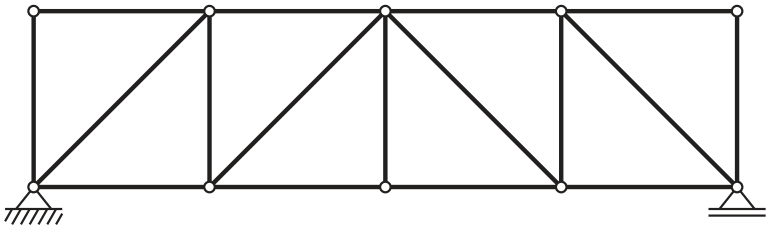
- Kriterium für statische Bestimmtheit:

$a + s = 2 \cdot k$

a ... Anzahl Auflagerkräfte
s ... Anzahl Stäbe
k ... Anzahl Knoten



Auflager mit möglichen Reaktionskräften
(links: Festlager, a = 2; rechts: verschiebliches Lager, a = 1)



Statisch bestimmtes Fachwerk



Josef-Dreier-Brücke | Weißenbach | Paul Nessler (Ingenieur) | 2022



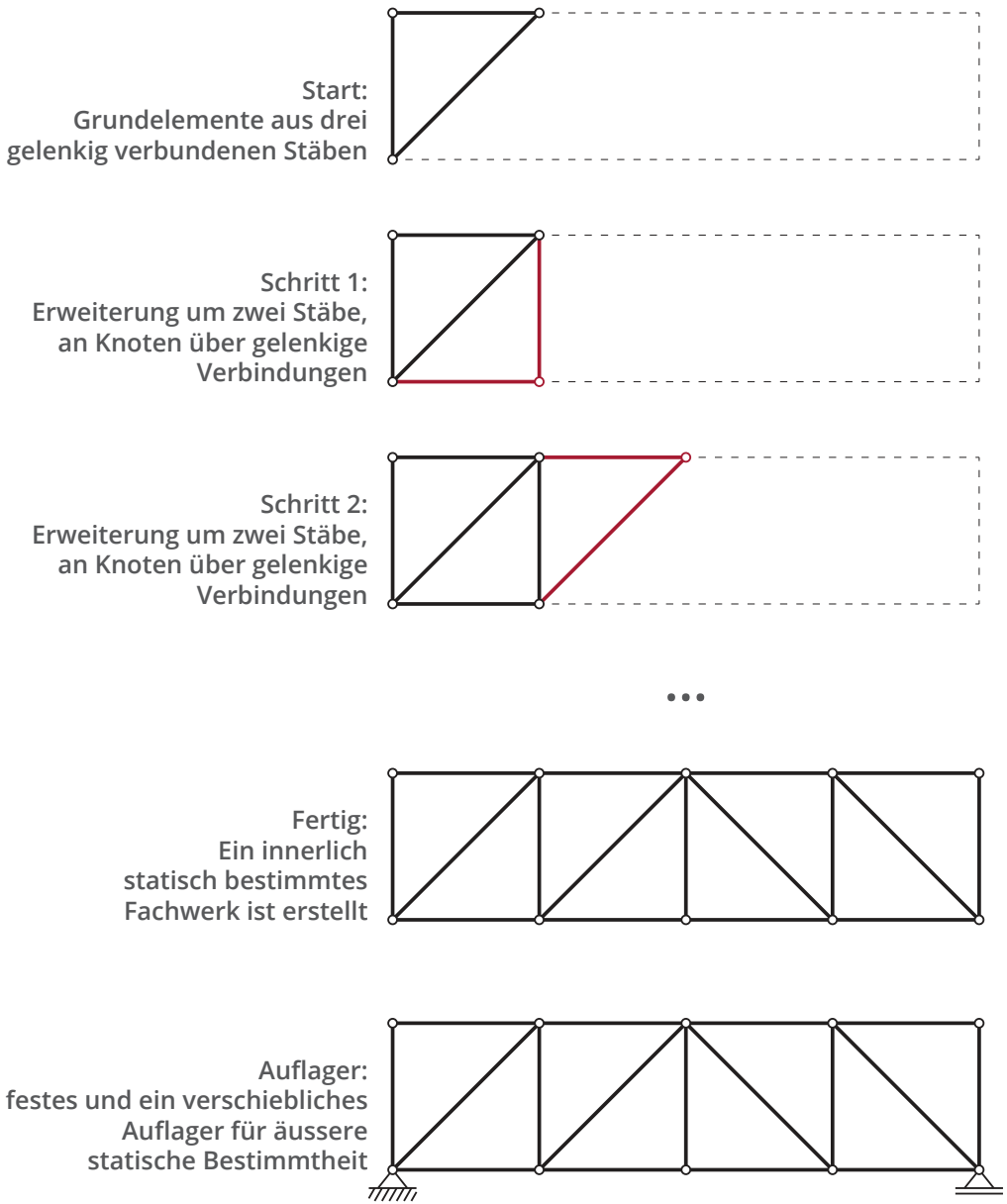
Quelle: oben: Autor
li. u.: URL https://www.komoot.com/de-de/highlight/5956236, Zugriff am 28.11.2024
re. u.: URL https://www.facebook.com/permalink.php?story_fbid=2234041763402068&id=134740412873250 7, Zugriff am 28.11.2024

Bildungsgesetz eines statisch bestimmten Fachwerks

- Start ist ein Grundelemente aus drei Stäben die gelenkig miteinander verbunden sind.
- In jedem Schritt erfolgt eine Erweiterung um zwei Stäbe, jeweils an Knoten über gelenkige Verbindungen.

→ Auf diese Weise entsteht ein innerlich statisch bestimmtes Fachwerk

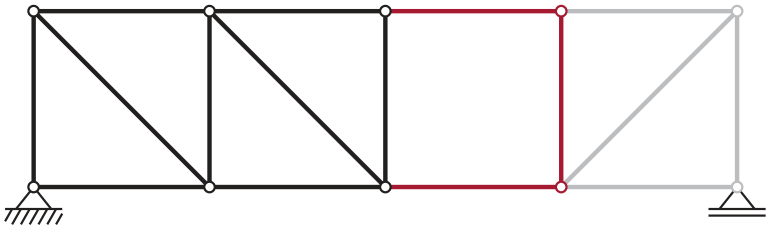
→ Damit das Fachwerk auch äusserlich statisch bestimmt ist, muss es ein festes und ein verschiebliches Auflager aufweisen (drei mögliche Auflagerkräfte).



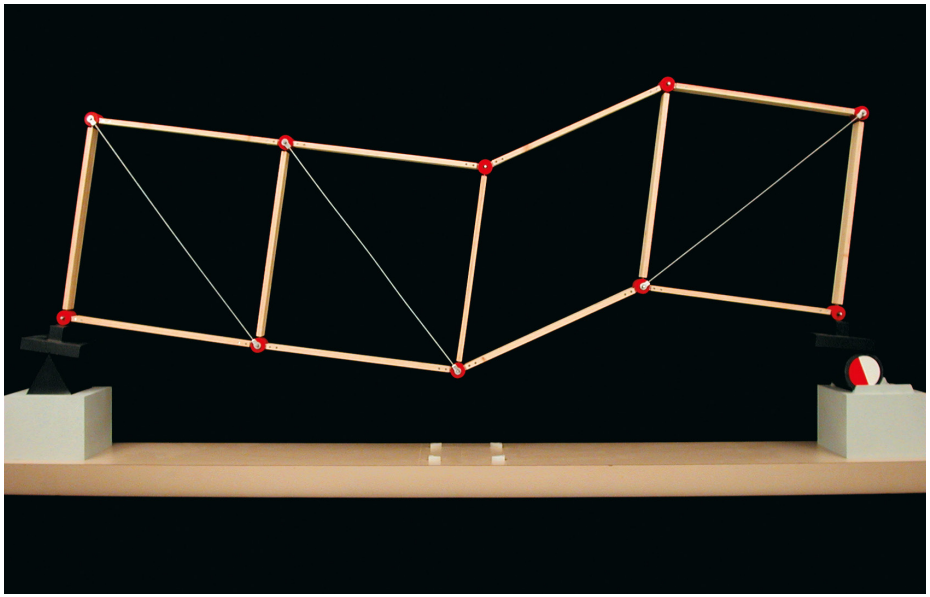
Quelle: Autor

Das kinematische Fachwerk

- Ein kinematisches Fachwerk entsteht wenn die Struktur in einem oder mehreren Bildungsschritten um drei Stäbe erweitert wurde.
- Kinematisch bedeutet: Das Tragwerk ist instabil. Es ist nicht in der Lage Kräfte aufzunehmen!
- Ein kinematisches Fachwerk zu bauen ist üblicherweise nicht sinnvoll.



Kinematisches Fachwerk
(rot: Bildungsschritt mit Erweiterung um drei Stäbe)



Demonstrationsmodell eines kinematischen Fachwerks

Quelle: oben: Autor
unten: Künzle, Otto (2001): Demonstrationen an Tragwerksmodellen. Zürich: ETH Zürich

Das kinematische Fachwerk

- Kriterium für eine kinematische Struktur:

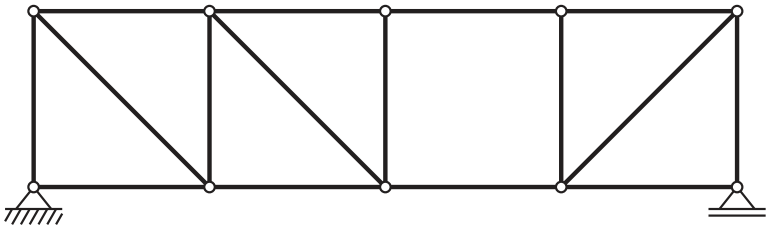
$a + s < 2 \cdot k$

a ... Anzahl Auflagerkräfte
s ... Anzahl Stäbe
k ... Anzahl Knoten



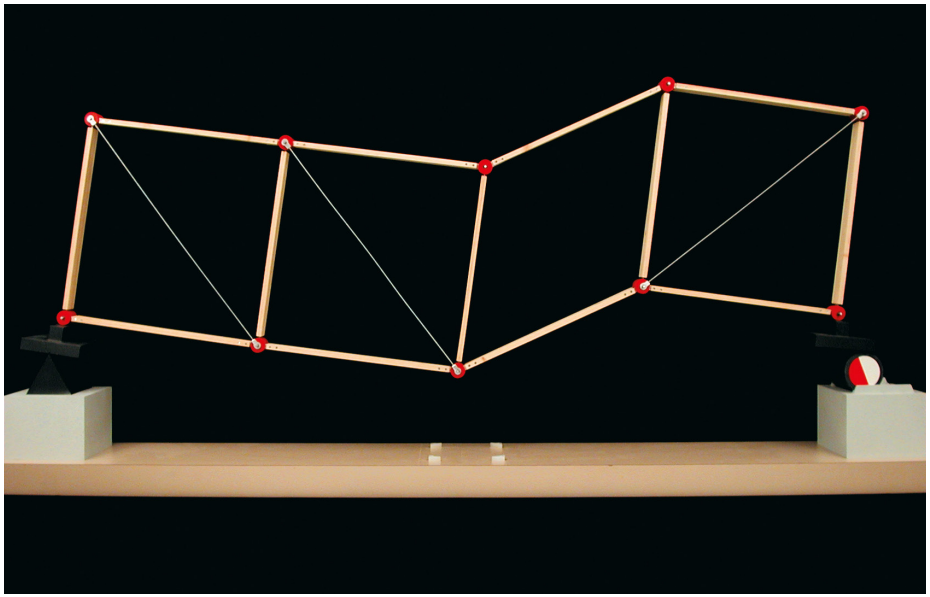
Auflager mit möglichen Reaktionskräften
(links: Festlager, a = 2; rechts: verschiebliches Lager, a = 1)

$3 + 16 < 2 \cdot 10$



a = 3
s = 16
k = 10

Kinematisches Fachwerk

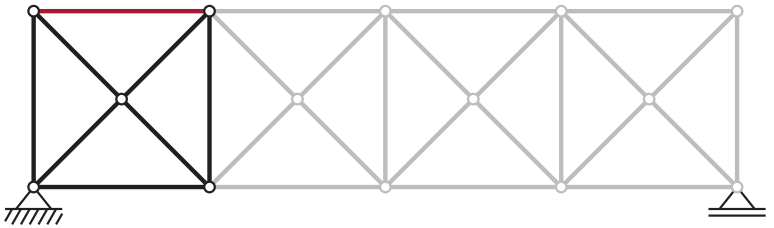


Demonstrationsmodell eines kinematischen Fachwerks

Quelle: oben: Autor
unten: Künzle, Otto (2001): Demonstrationen an Tragwerksmodellen. Zürich: ETH Zürich

Das statisch unbestimmte Fachwerk

- Ein statisch unbestimmtes Fachwerk entsteht wenn die Struktur in einem oder mehreren Bildungsschritten um nur einen Stab erweitert wurde.
- Statische Unbestimmtheit bedeutet: Innere Kräfte und Auflagerkräfte können nicht ausschliesslich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden.
  → Es existieren prinzipiell mehrere Lösung
- Zur eindeutigen Bestimmung der inneren Kräfte und Auflagerkräfte müssen weitere Bedingungen definiert werden.
  (z.B. Annahme, dass alle Stäbe ein linear-elastisches Verformungsverhalten haben)
- In statisch unbestimmten Tragwerken können aufgrund von Bauteilverformungen infolge Temperaturänderungen innere Kräfte entstehen (Zwangskräfte), auch wenn am Tragwerk keine äusseren Kräfte einwirken.



Statisch unbestimmtes Fachwerk
(rot: Bildungsschritt mit Erweiterung um nur einen Stab)



Pont ferroviaire Saint-Jean | Bordeaux
Stanislas de la Laroche-Tolay, Paul Régnault und Gustave Eiffel | 1860

Quelle: oben: Autor
unten: URL http://archi-trouve.blogspot.com/2013/04/gustave-eiffel-in-bordeaux.html, Zugriff am 19.02.2023

Das statisch unbestimmte Fachwerk

- Kriterium für statische Unbestimmtheit:

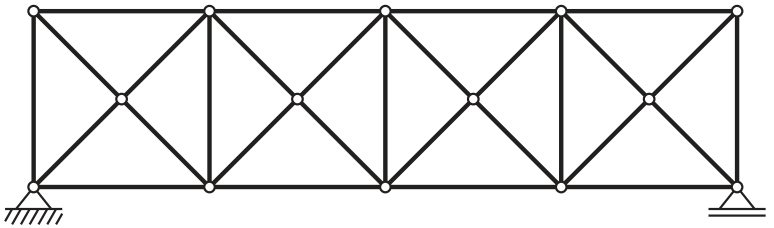
$a + s > 2 \cdot k$

a ... Anzahl Auflagerkräfte
s ... Anzahl Stäbe
k ... Anzahl Knoten



Auflager mit möglichen Reaktionskräften
(links: Festlager, a = 2; rechts: verschiebliches Lager, a = 1)

$3 + 29 > 2 \cdot 14$



a = 3
s = 29
k = 14

Statisch unbestimmtes Fachwerk



Pont ferroviaire Saint-Jean | Bordeaux
Stanislas de la Laroche-Tolay, Paul Régnault und Gustave Eiffel | 1860

Quelle: oben: Autor
unten: URL http://archi-trouve.blogspot.com/2013/04/gustave-eiffel-in-bordeaux.html, Zugriff am 19.02.2023

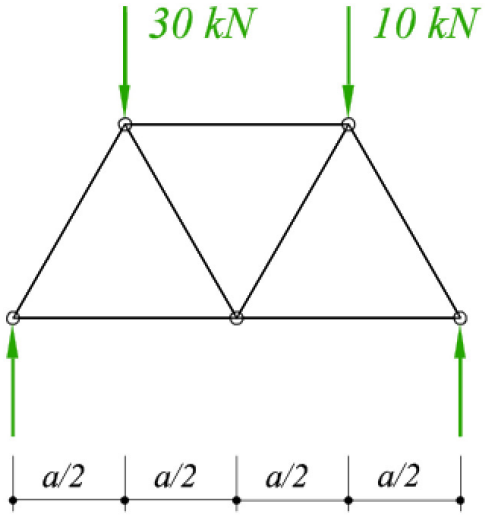
Analyse von Fachwerken

Ziele der Analyse

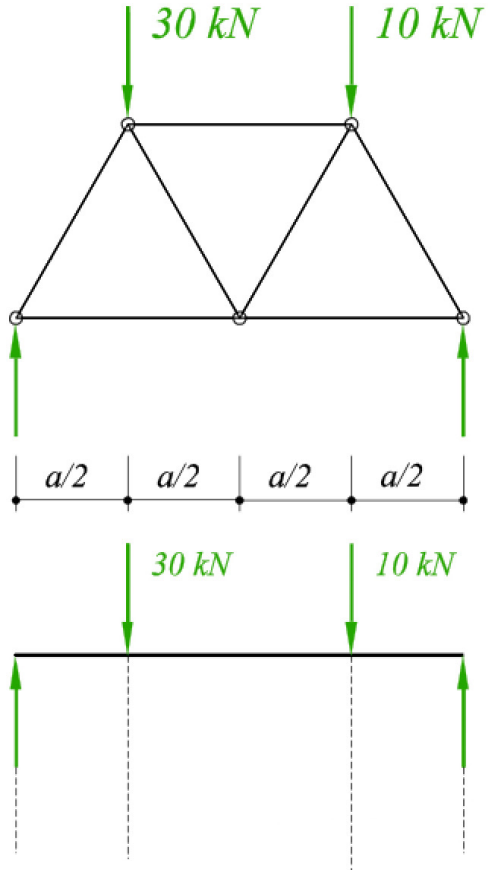
- Ermittlung der inneren Kräfte (Stabkräfte)
- Ermittlung der Auflagerkräfte

Vorgehen

- Ermittlung der inneren Kräfte mit den Gleichgewichtsbedingungen in den Knoten (Gleichgewicht von Kräften deren Wirkungslinien sich in einem Punkt schneiden).
- Wenn es Knoten gibt an welchen genügend viele Kräfte bekannt sind (nur zwei dürfen unbekannt sein), kann unter Umständen direkt mit der Ermittlung der inneren Kräfte begonnen werden.
- Wenn es keine Knoten gibt an welchen nur zwei Kräfte unbekannt sind, müssen die Auflagerkräfte vorgängig bestimmt werden (z.B. über das Seilpolygonverfahren).

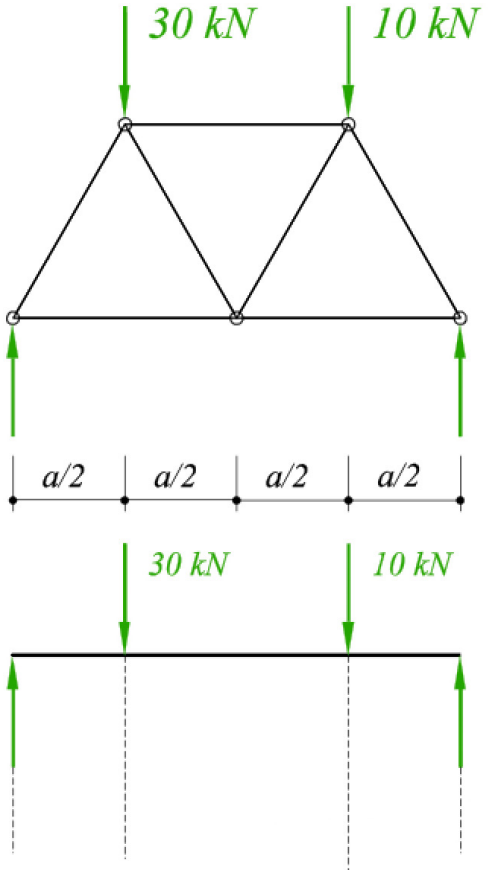


Ermittlung der Auflagerkräfte mit dem Seilpolygonverfahren

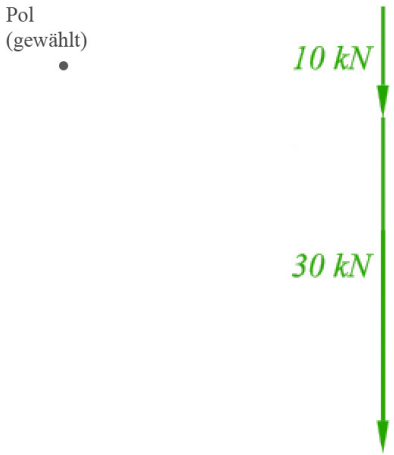


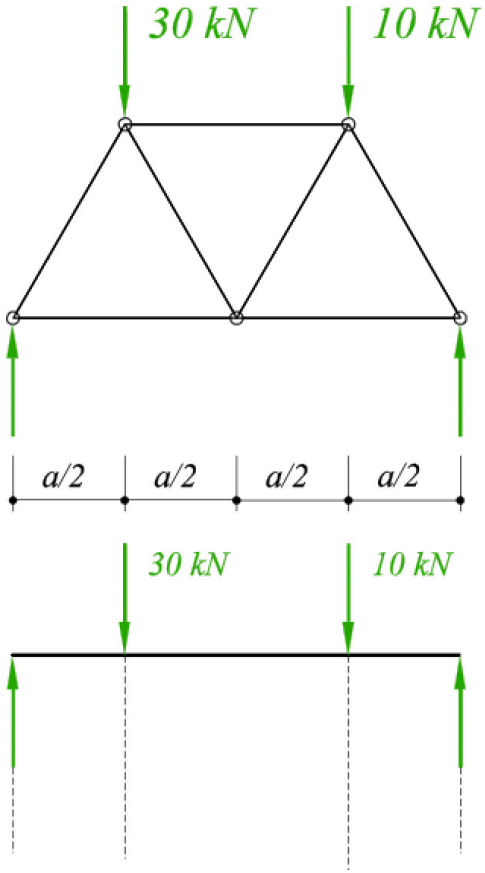
Ermittlung der Auflagerkräfte mit dem Seilpolygonverfahren



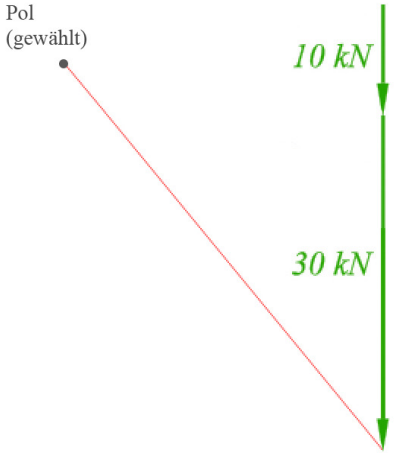


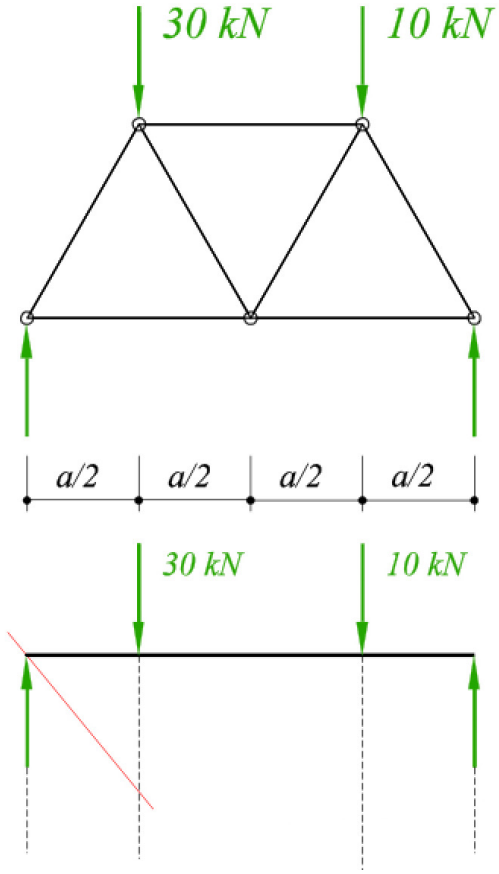
Ermittlung der Auflagerkräfte mit dem Seilpolygonverfahren



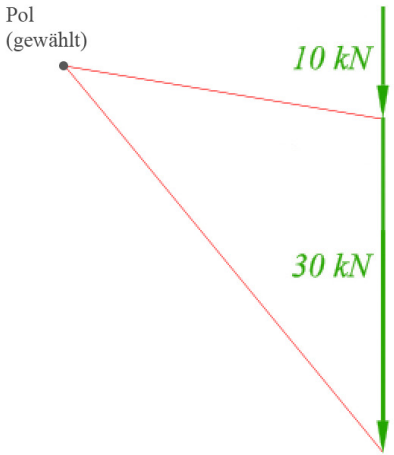


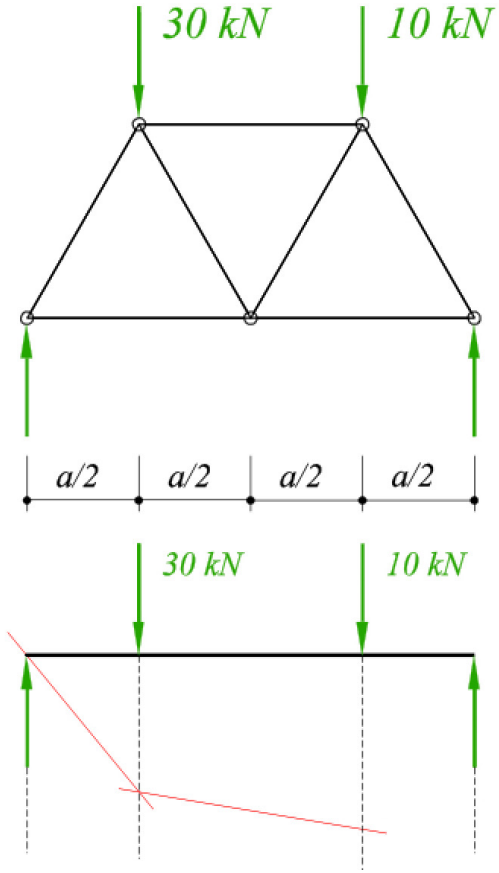
Ermittlung der Auflagerkräfte mit dem Seilpolygonverfahren



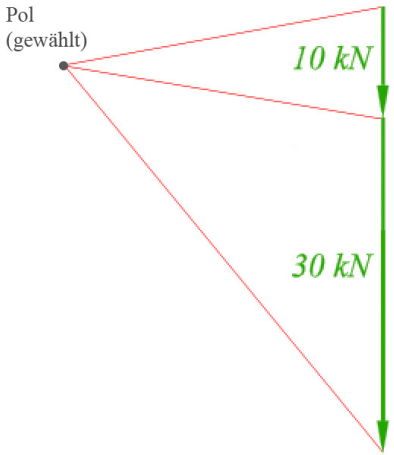


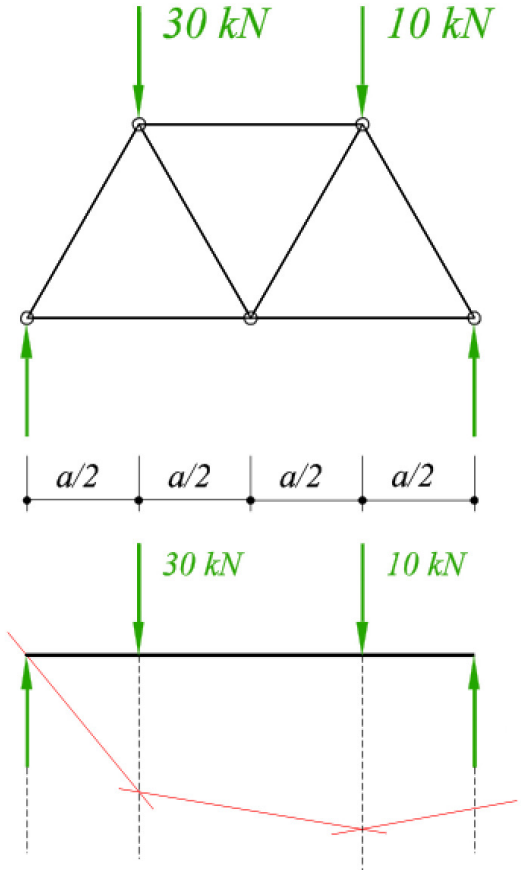
Ermittlung der Auflagerkräfte mit dem Seilpolygonverfahren



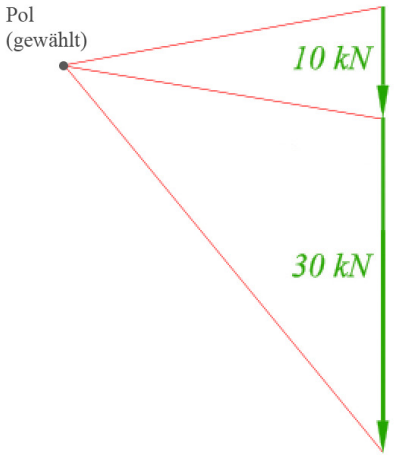


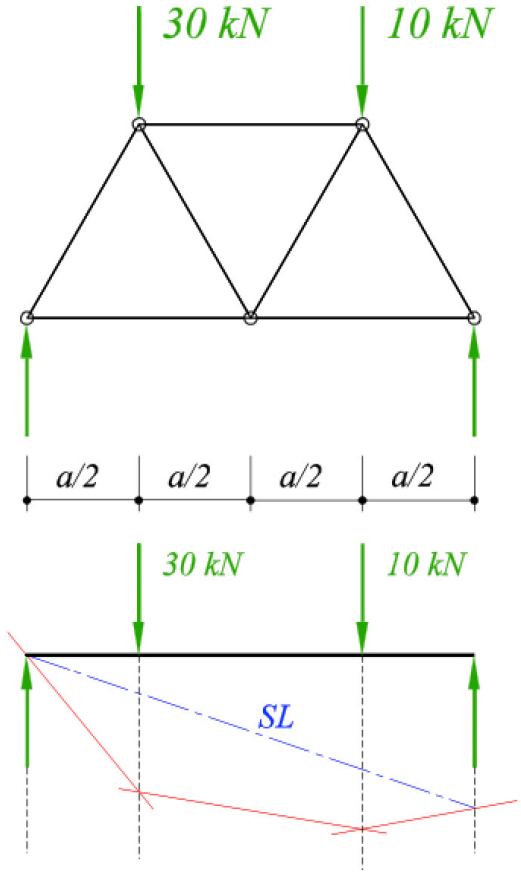
Ermittlung der Auflagerkräfte mit dem Seilpolygonverfahren



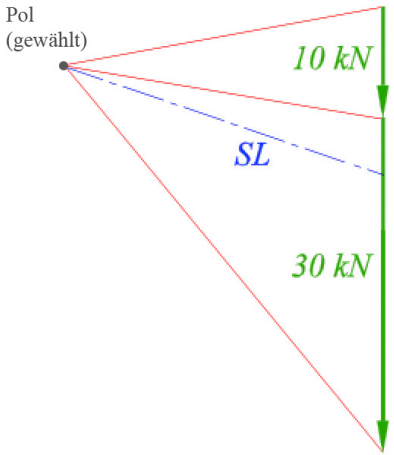


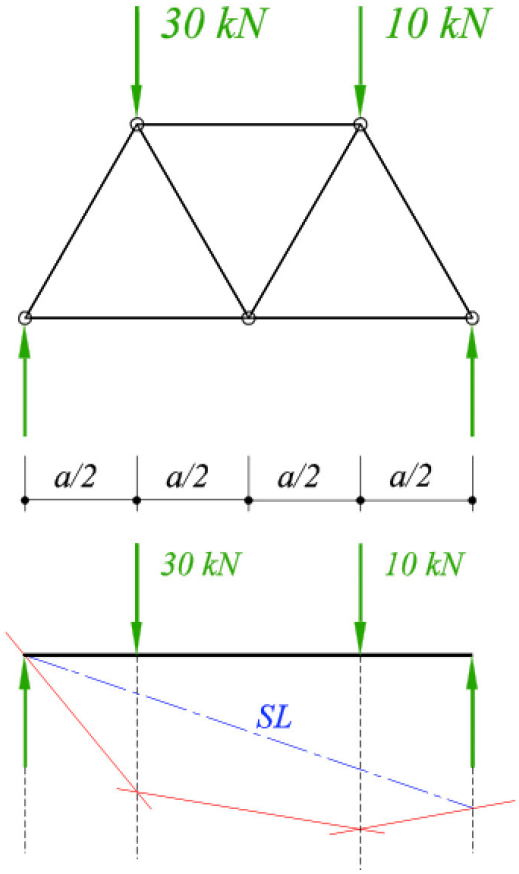
Ermittlung der Auflagerkräfte mit dem Seilpolygonverfahren



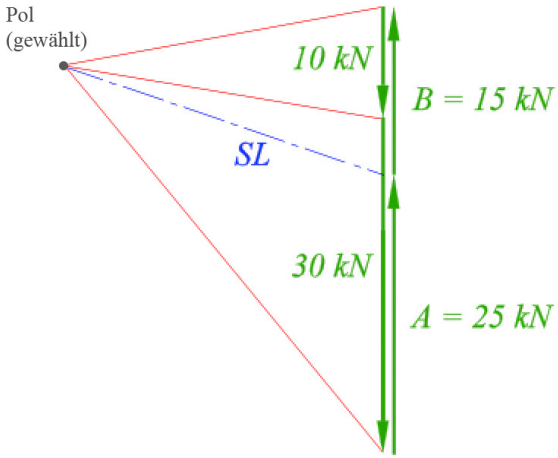


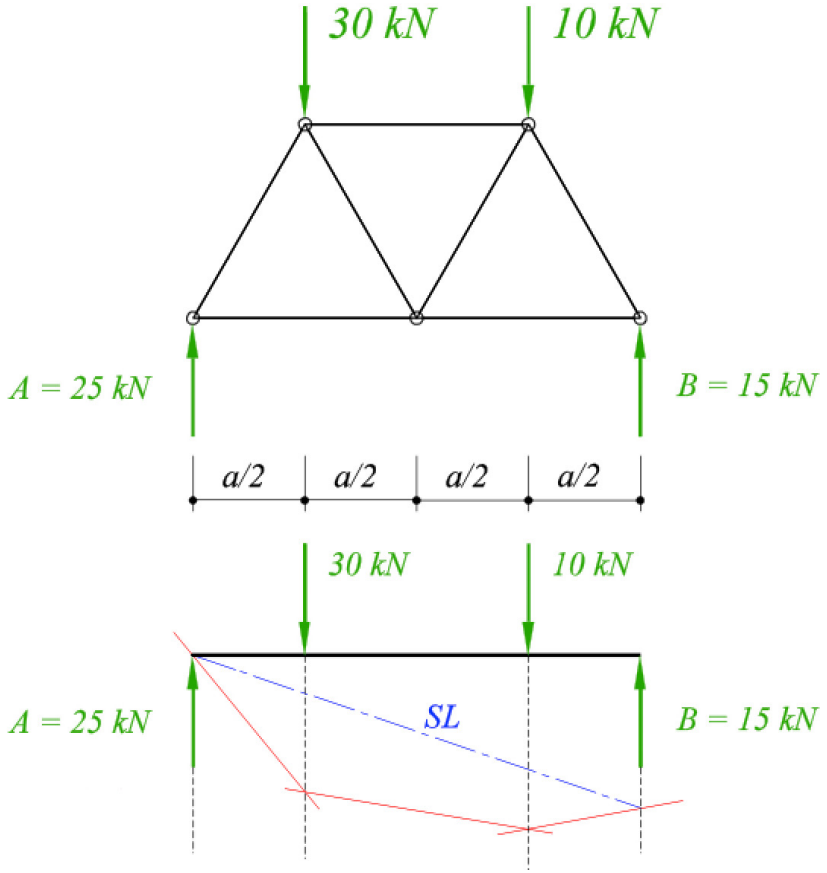
Ermittlung der Auflagerkräfte mit dem Seilpolygonverfahren



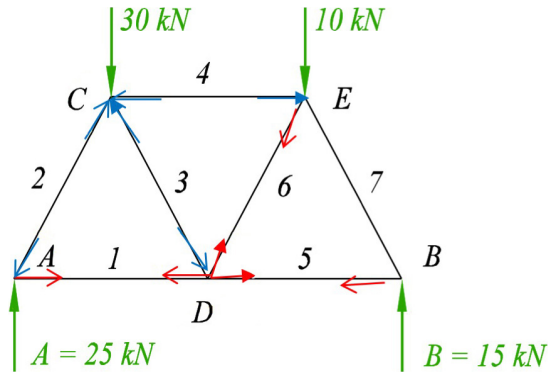


Ermittlung der Auflagerkräfte mit dem Seilpolygonverfahren



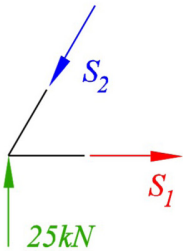


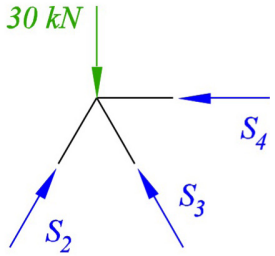
Ermittlung der inneren Kräfte mit den Gleichgewichtsbedingungen in den Knoten

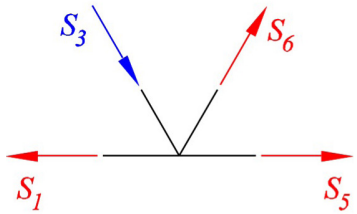


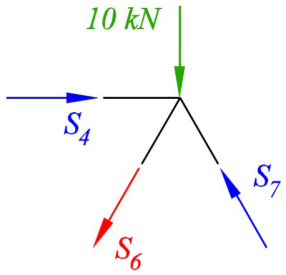
Umfahrungssinn Knoten

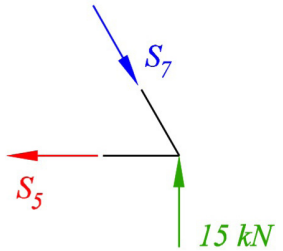


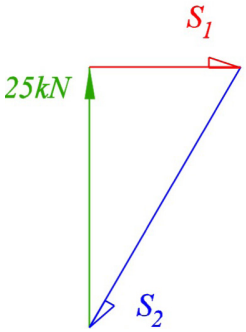




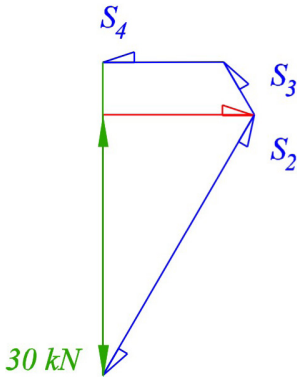




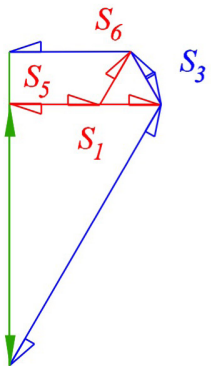




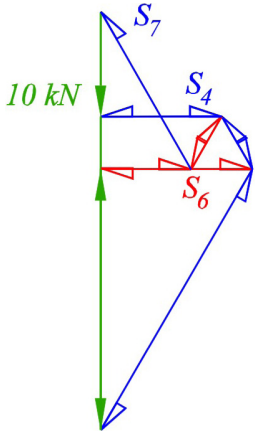
Knoten A



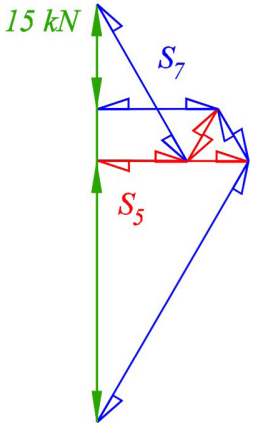
Knoten C



Knoten D

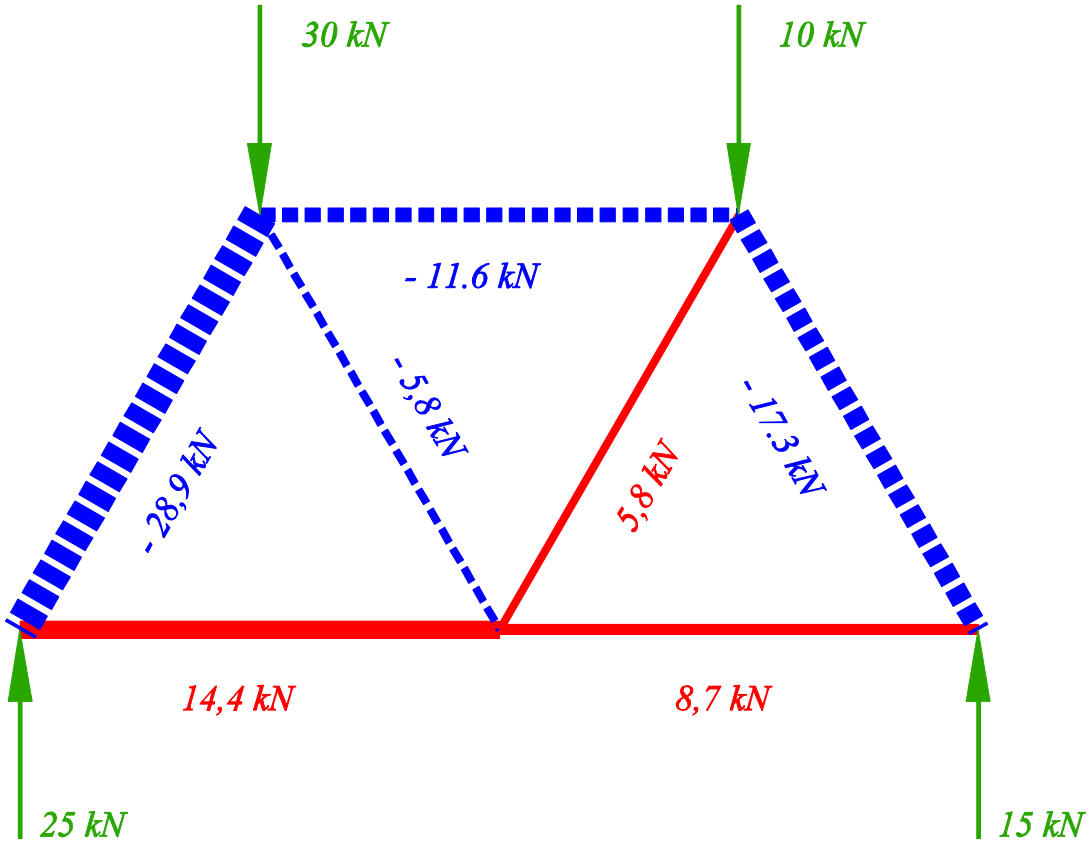


Knoten E



Knoten B

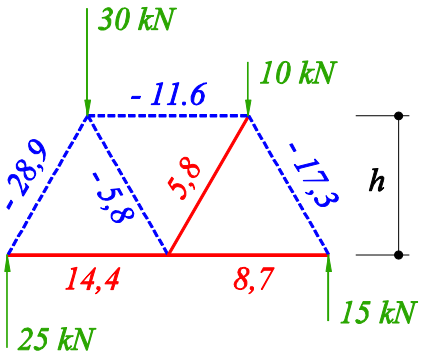
Zusammenstellung der Ergebnisse

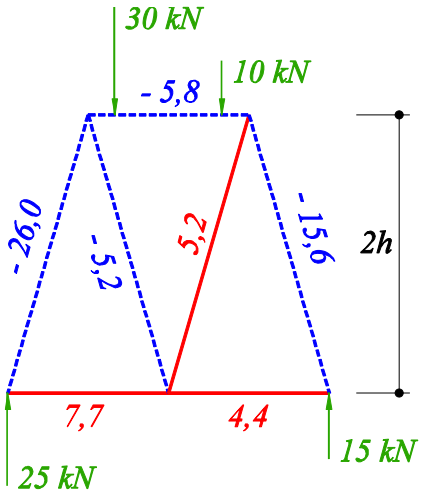


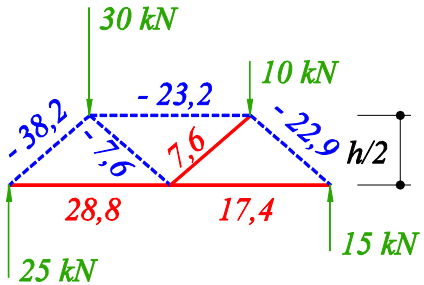
Darstellung der Resultate der Analyse (Innere Kräfte und Auflagerkräfte)

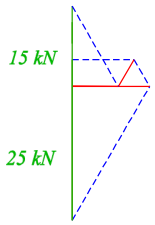
Einfluss der statischen Höhe eines Fachwerks auf die inneren Kräfte

- Verdoppelung der statischen Höhe → Halbierung der Gurtkräfte
- Halbierung der statischen Höhe → Verdopplung der Gurtkräfte
- Die Kräfte in den Diagonalen sind von ihrer Neigung und nicht von der absoluten Grösse des Tragwerks abhängig (→ eine Verdopplung oder Halbierung der statischen Höhe des Fachwerkes führt nicht zu einer Halbierung oder Verdoppelung der Strebenkräfte)

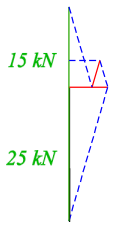




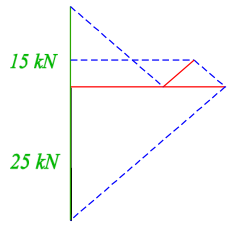




Referenzhöhe



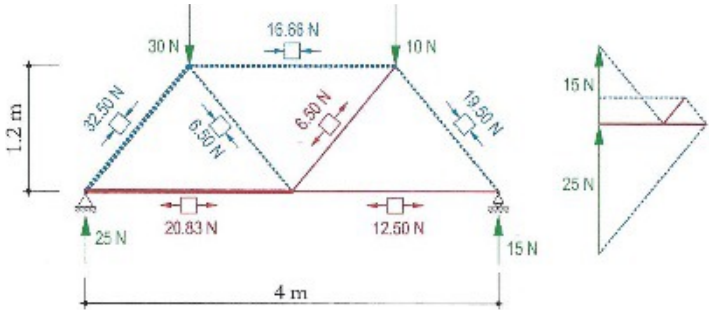
Verdopplung der statischen Höhe
im Vergleich zur Referenzhöhe



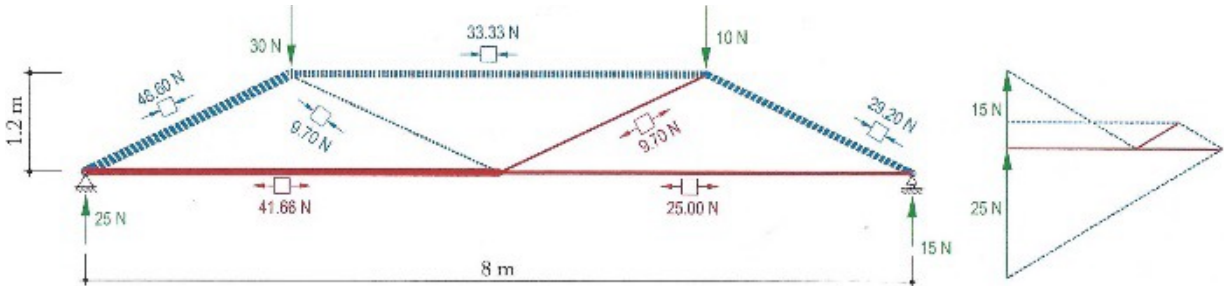
Halbierung der statischen Höhe
im Vergleich zur Referenzhöhe

Einfluss der Spannweite eines Fachwerks auf die inneren Kräfte

- Bei Verdopplung der Spannweite bei gleicher Höhe und gleicher Belastung verdoppeln sich die Kräfte in den Gurten.
- Dies gilt auch wiederum nicht für die Strebenkräfte, da diese vom Neigungswinkel abhängig sind.



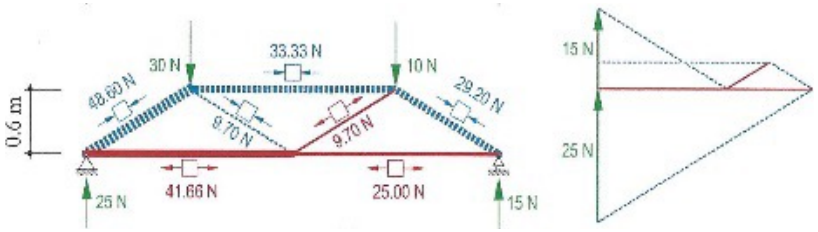
Referenzspannweite



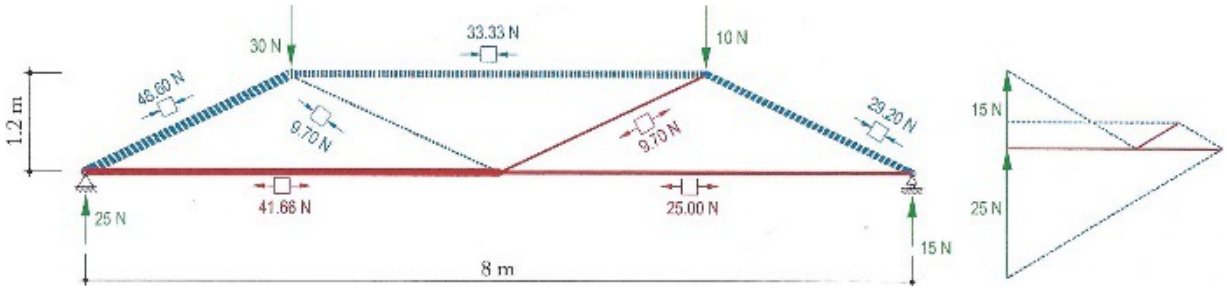
Verdopplung der Spannweite
im Vergleich zur Referenzspannweite

Einfluss der Spannweite eines Fachwerks auf die inneren Kräfte

- Bei Verdopplung der Spannweite und der statischen Höhe bei gleicher Belastung bleiben alle inneren Kräfte gleich gross.

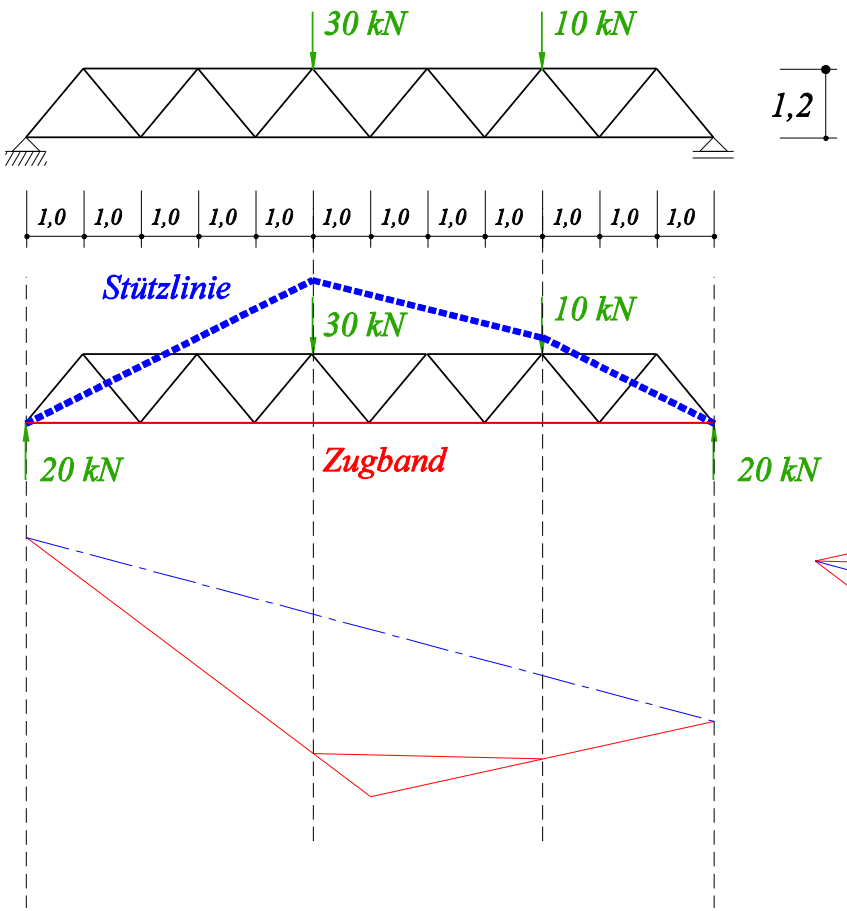


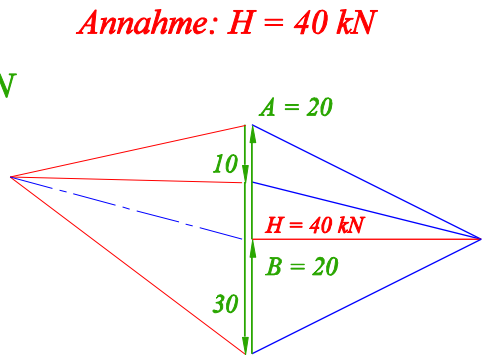
Referenzspannweite und -höhe



Verdopplung der Spannweite und der statischen Höhe
im Vergleich zu den Referenzmassen

Analogie zu Bogen-Seil-Tragwerken



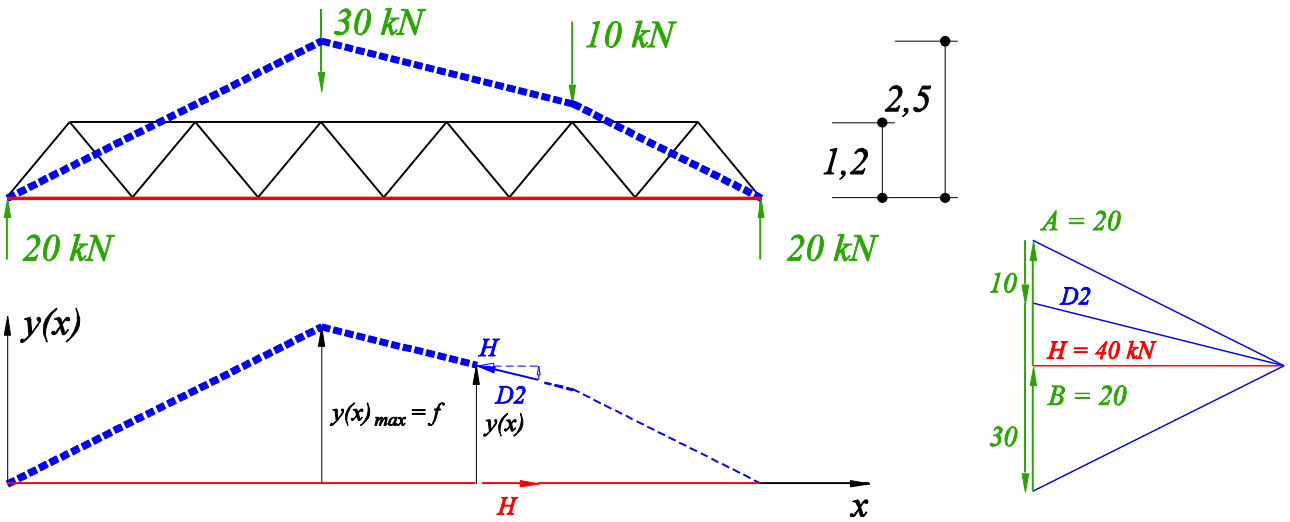


Konstruktion des äquivalenten Bogen-Seil-Tragwerkes für die gegebene äussere Last

Mit Hilfe des, in das Fachwerk einbeschriebenen, Bogen-Seil-Tragwerkes können Aussagen über:

- die maximale Gurtkraft und ihre Lage
- die qualitativen Kräfte in den Streben
- die maximale Strebenkraft und ihre Lage

gemacht werden.



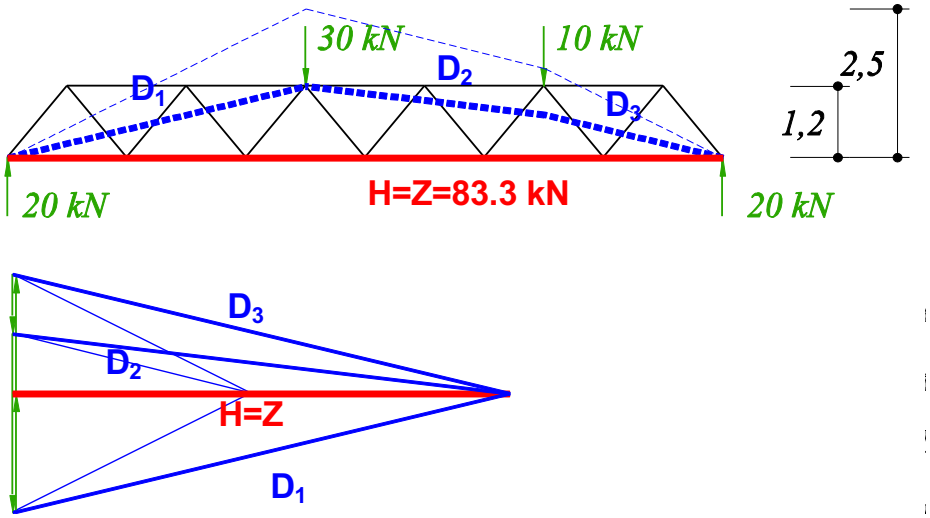
f * H = f_{neu} * H_{neu} => H_{neu}

Konstruktion des äquivalenten Bogen-Seil-Tragwerkes für die gegebene äussere Last

- Nach der Ermittlung des äqivalenten Bogen Seil Tragwerkes muss dieses durch Anpassen der Pfeilhöhe f in das Fachwerk eingepasst werden.
- Oberster Punkt Bogen muss auf oberem Gurt des Fachwerk liegen
- Nur dann sind auch quantitative Aussagen über die Grösse der Gurt- und Strebenkräfte möglich
- Die Einstellung der Pfeilhöhe f des Bogen Seil-Tragwerkes erfolgt mit unterer Beziehung:

f * H = f_{neu} * H_{neu}

=> H_{neu}



Die Kraft im Zugband ergibt sich aus:

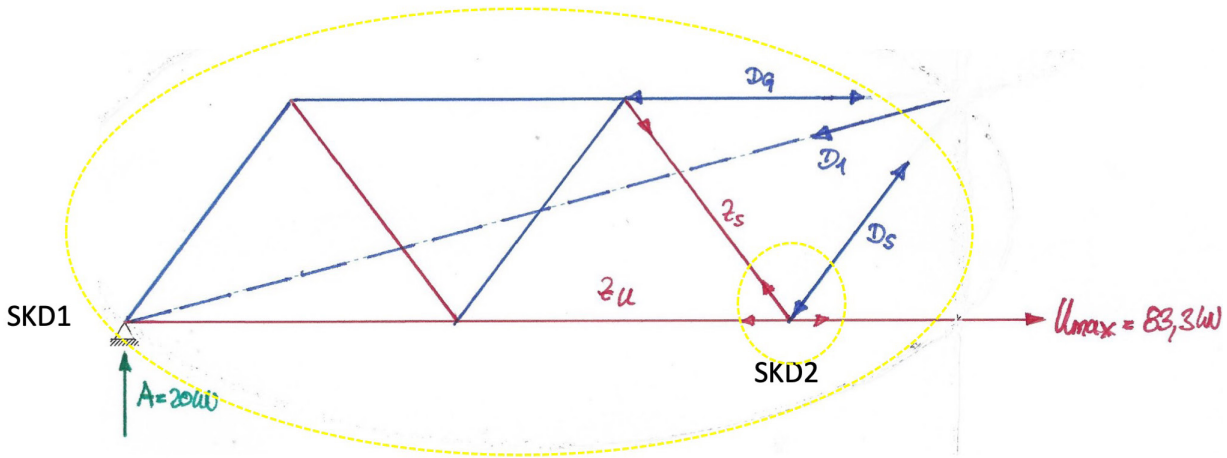
$$H_{neu} = (H*f) / f_{neu} = 40kN*2.5m/1.2m = 83.3\ kN$$

Einpassen des Bogen-Seil-Tragwerkes in die statische Höhe des Fachwerkes

- Die Kraft im Zugband des Bogens ist so zu wählen, dass der Scheitelpunkt der Stützlinie in einem Knoten des Fachwerkgurtes zu liegen kommt.

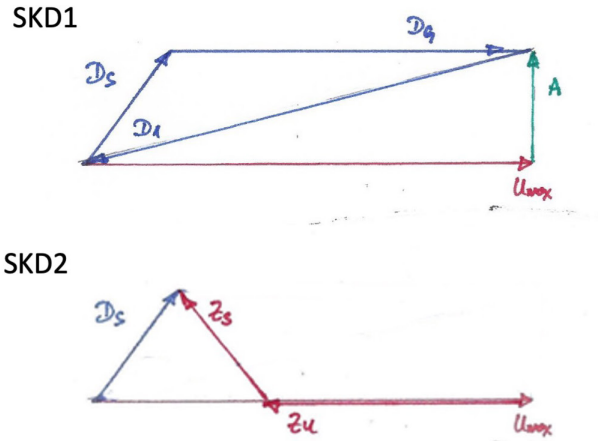
Erkenntnisse

- Die Grösse der Auflagerkräfte des Fachwerkes entspricht denjenigen des Bogen-Seil-Tragwerkes
- Die maximale Kraft im unteren Gurt des Fachwerkes entspricht der Zugbandkraft des Bogen-Seil-Tragwerkes
- Die Druckkräfte D_1 bis D_3 des Bogens können zur Ermittlung der Strebenkräfte des Fachwerkes genutzt werden



Umfahrungssinn Knoten



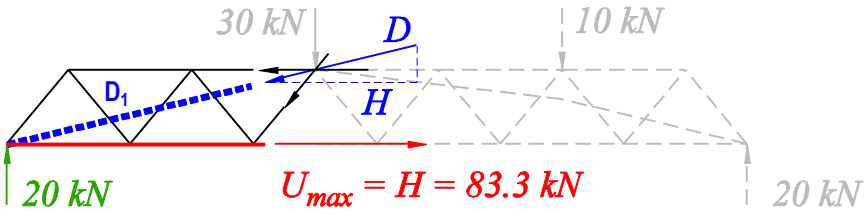


Erkennen der auf Zug und Druck beanspruchten Diagonalen

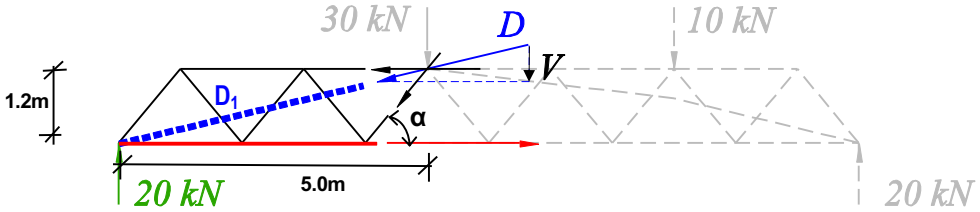
Für parallelgurtige Fachwerke, deren Diagonalen sich nicht überlappen, kann verallgemeinert werden:

- Diagonalen, die in die gleiche Richtung wie der Bogen der Stützlinie geneigt sind, werden auf Druck beansprucht
- Diagonalen die entgegengesetzt Richtung wie der Bogen der Stützlinie geneigt sind, werden auf Zug beansprucht

Dieser Zusammenhang kann durch Knotengleichgewicht bewiesen werden (siehe Gleichgewicht an den Schnittkörperdiagrammen SKD1 und SKD2)







$$V = \frac{1{,}2\ m}{5{,}0\ m}\ 83{,}3\ kN$$

$$V = 20\ kN$$

$$D = V / \sin\alpha$$

V ist der vertikale Anteil der Druckkraft D_1 des Bogen-Seil-Tragwerkes

Erkennen der Lage der grössten Gurtkraft und der Lage und Betrag der grössten Strebenkraft

Bei Strebenfachwerken

Die grösste Kraft im unteren Fachwerkgurt entspricht der Zugbandkraft H des eingepassten äquivalenten Bogen-Seil-Tragwerkes.

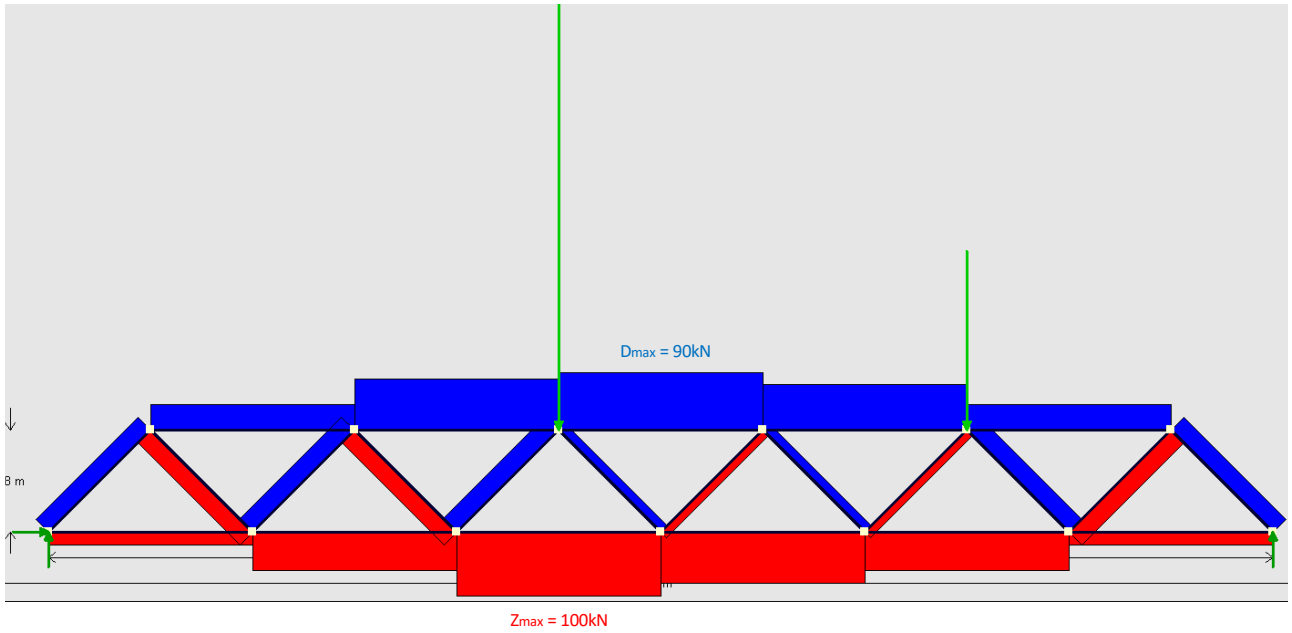
Die grösste Kraft im unteren Gurt U_{max} = H tritt „unter“ dem höchsten Punkt der Stützlinie des Bogens auf.

Die grösste Strebenkraft tritt dort auf, wo die Stützlinie des Bogens am stärksten geneigt (am steilsten) ist.

Der Betrag der maximalen Strebenkraft entspricht dem vertikalen Anteil V der am stärksten geneigten Druckkraft der Stützlinie geteilt durch den Winkel der Fachwerkstrebe.

$$D_{Strebemax} = V_{Stützl} / \sin\alpha$$

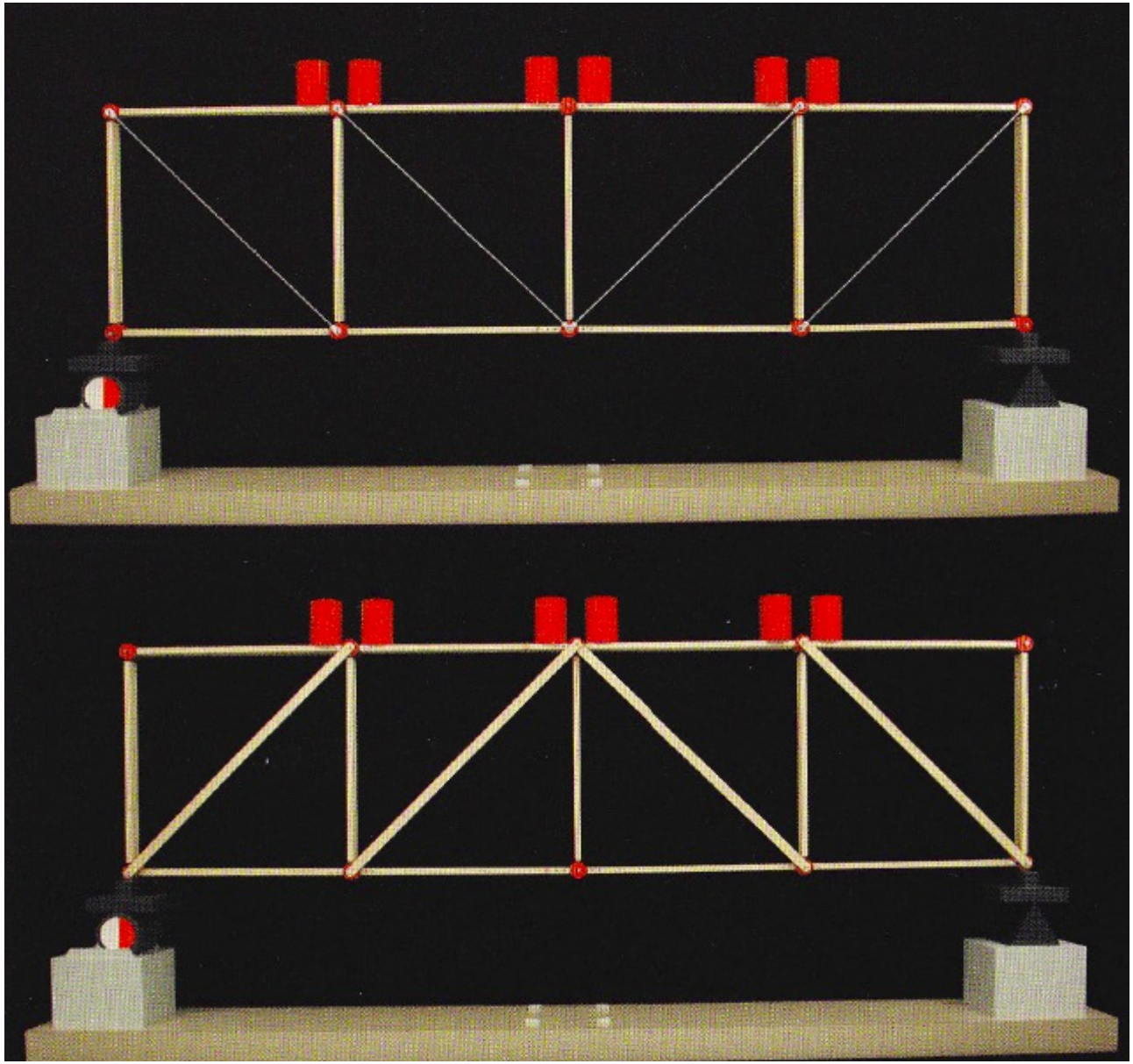
Dies gilt bei Strebenfachwerken mit wechselnden Neigungen der Diagonalen



Es gilt:

- Die grösste Zugkraft und die grösste Druckkraft müssen bei V-förmigen Diagonalen nicht übereinstimmen. Dies liegt daran, dass die Knoten der Gurte sich nicht gegenüberliegen.
- Bei rein vertikaler Belastung auf dem Obergurt ist die Untergurtkraft (Zug) zumeist grösser als die Obergurtkraft (Druck).
- Greifen die Lasten am Untergurt an, so ist die Obergurtkraft zumeist grösser, als die Untergurtkraft.
- Die Grösse der Untergurtkraft stimmt stets mit der Zugbandkraft des äquivalenten Bogen-Seil-Tragwerkes überein

ANALOGIE ZU BOGEN-SEIL-TRAGWERKEN



Erkennen der auf Zug und Druck beanspruchten Diagonalen

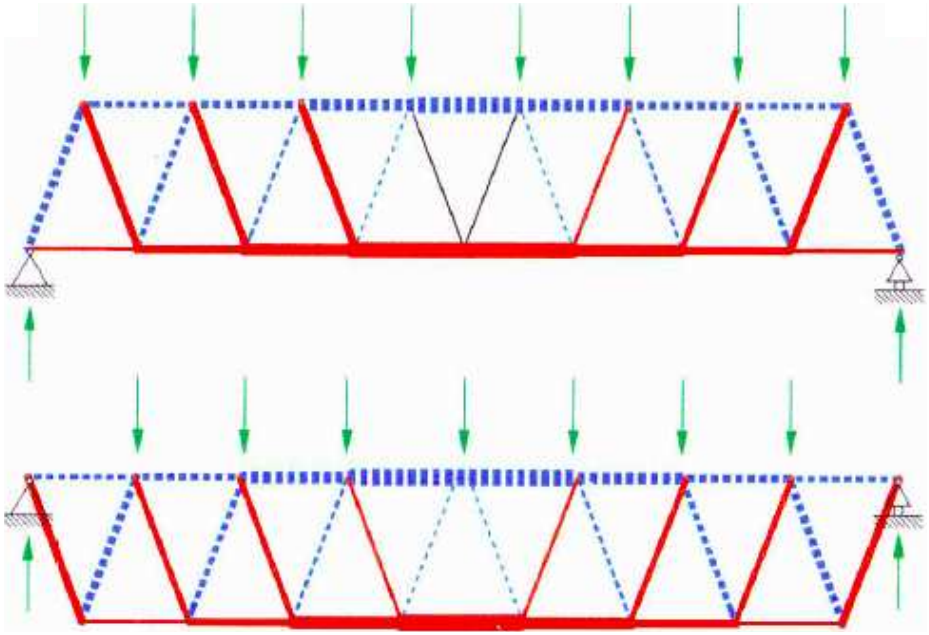
- Sind die diagonalen Streben mit ihrer Neigung „vom naheliegendsten Auflager weg“ orientiert, so sind sie unter gleichmässig verteilten Lasten auf Zug beansprucht (Seile möglich)
- Sind die diagonalen Streben mit ihre Neigung „zum naheliegendsten Auflager hin“ orientiert, so sind sie unter gleichmässig verteilten Lasten auf Druck beansprucht (Knicken!)

Dies gilt immer bei parallelgurtigen Fachwerken mit diagonalen Streben unter gleichmässig verteilter Last welche zwischen zwei Auflagern spannen

Parallelgurtige Fachwerktypen

Fachwerke mit V-förmiger Anordnung der Füllstäbe

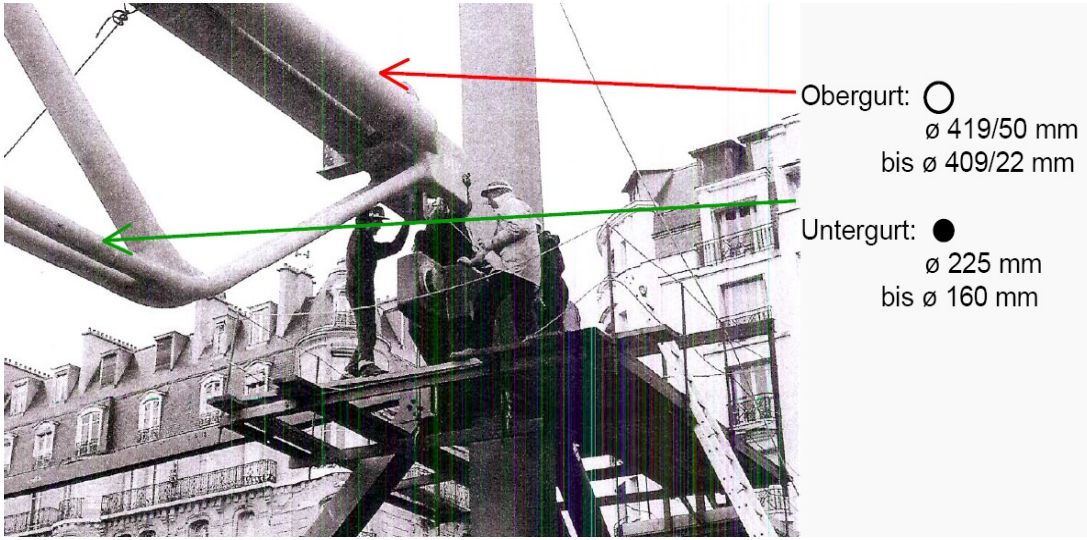
- Kräfte in Diagonalen abwechselnd Zug und Druck
- Unter ständigen und symmetrischen Lasten in Feldmitte 2 Druckstreben nebeneinander
- Unter asymmetrische veränderlichen Lasten im Bereich der Last auch 2 Druckstreben nebeneinander möglich
- Bemerkung: weisst das Strebenfachwerk eine gerade Anzahl von Felder auf, so sind die beiden innersten Diagonalen unter ständigen Lasten Nullstäbe



Strebenfachwerk «System Warren» | Patent von James Warren | 1848

Fachwerke mit V-förmiger Anordnung der Füllstäbe

- Bei Stahlfachwerken:
  - Druckdiagonalen meist Rohr- oder I-Querschnitt
  - Zugdiagonalen auch Vollstäbe oder Flacheisen möglich

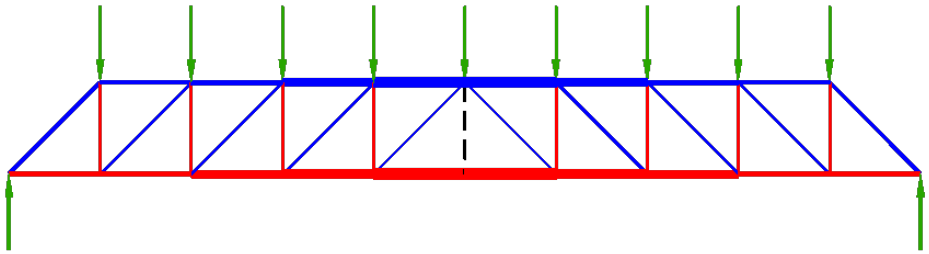




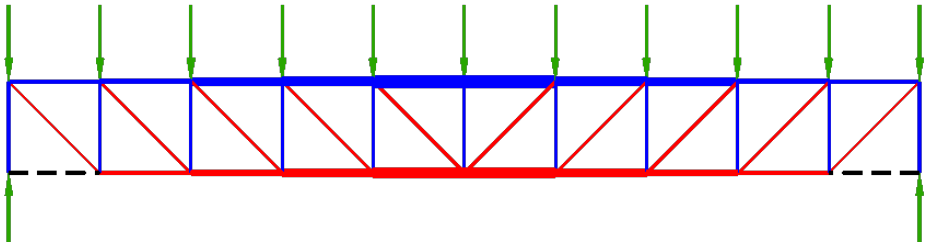
Centre Georges Pompidou | Paris | Renzo Piano und Richard Rogers (Architekten); Peter Rice und Ove Arup (Ingenieure) | 1977

Fachwerke mit N-förmiger Anordnung der Füllstäbe

- Je nach Neigung sind die Diagonalen auf Druck oder auf Zug beansprucht (für ständige Lasten und gleichmässig verteilte, veränderliche Lasten
- Unter unsymmetrischen, veränderlichen Lasten kann auch Zug (System Howe) bzw. Druck (System Pratt) in den Diagonalen auftreten
- Die Pfosten sind dann entsprechend auf Zug bzw. auf Druck beansprucht
- Bemerkung: Die schwarz gestrichelten Pfosten der Fachwerke sind für die dargestellte Last Nullstäbe!



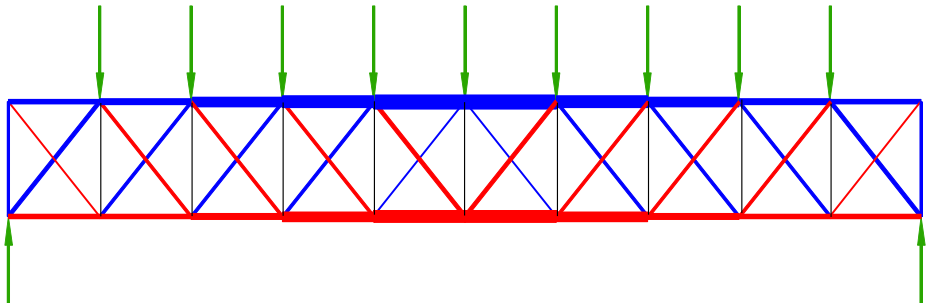
Pfosten-Streben-Fachwerk mit druckbeanspruchten Diagonalen «System Howe» | Patent von Howe | 1840



Pfosten-Streben-Fachwerk mit zugbeanspruchten Diagonalen «System Pratt» | Patent von Pratt | 1844

Fachwerke mit X-förmiger Anordnung der Füllstäbe

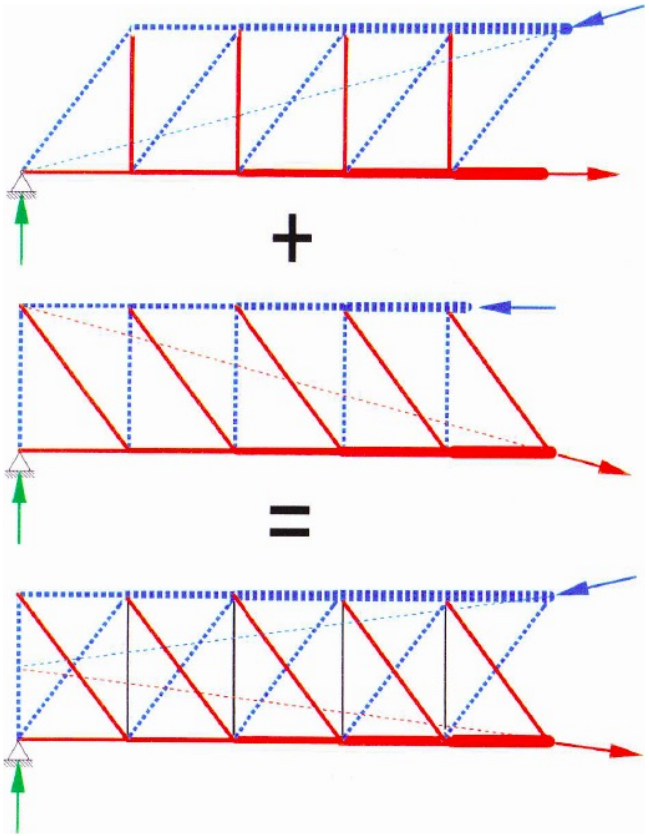
- Fachwerk ist statisch unbestimmt
- Kombination von beiden N-förmigen Systemen
- ein Teil der Last wird von Fachwerk mit Druckstreben und anderen Teil der Last von Fachwerk mit Zugstreben abgetragen
- Pfosten aufgrund erster Tragweise auf Zug, aufgrund zweiter Tragweise auf Druck beansprucht. Beide Beanspruchungen können sich kompensieren und somit Kräfte in den Pfosten sehr klein
- durch statische Unbestimmtheit grosse Redundanz und Tragsicherheit
- kleinere Verformungen (als Fachwerke ohne doppeltem Strebenzug)



X-Fachwerk «System Long» | Patent von Stephen H. Long | 1839

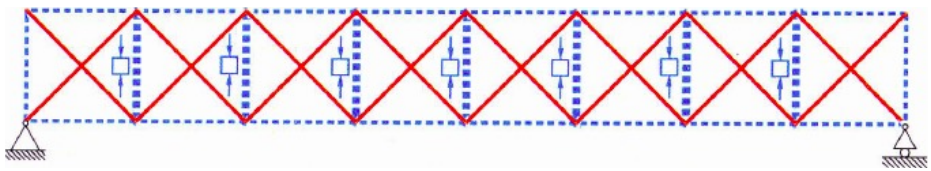
Fachwerke mit X-förmiger Anordnung der Füllstäbe

- Fachwerk aus x-förmigen Diagonalen aus Überlagerung von N-förmigen auf Druck und Zug belasteten Diagonalen
- Die vertikalen Pfosten können auch wegelassen werden.
- Dies entspricht dann der Überlagerung zweier Strebenfachwerke

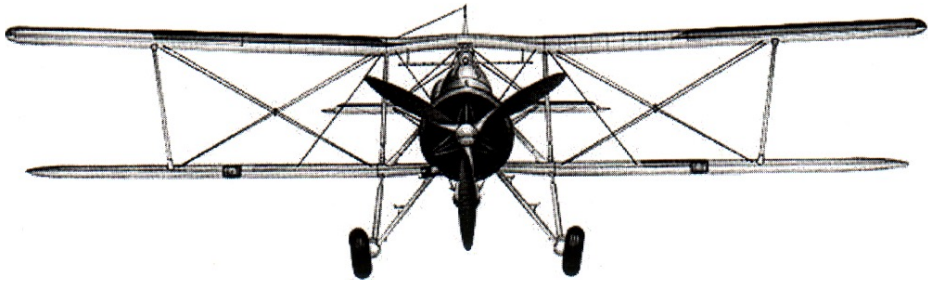


Fachwerke mit X-förmiger Anordnung der Füllstäbe

- Vorspannung der Pfosten bzw. Diagonalen möglich, da statisch unbestimmtes Fachwerk
- Geschieht durch aufgezwungene Verformungen
  (z.B. zu lange Pfosten resp. zu kurze Diagonalstäbe/Seile einbauen)
- Ziel der Vorspannung:
  Immer Zugkräfte in den Diagonalstäben auch bei wechselnden äusseren Lasten



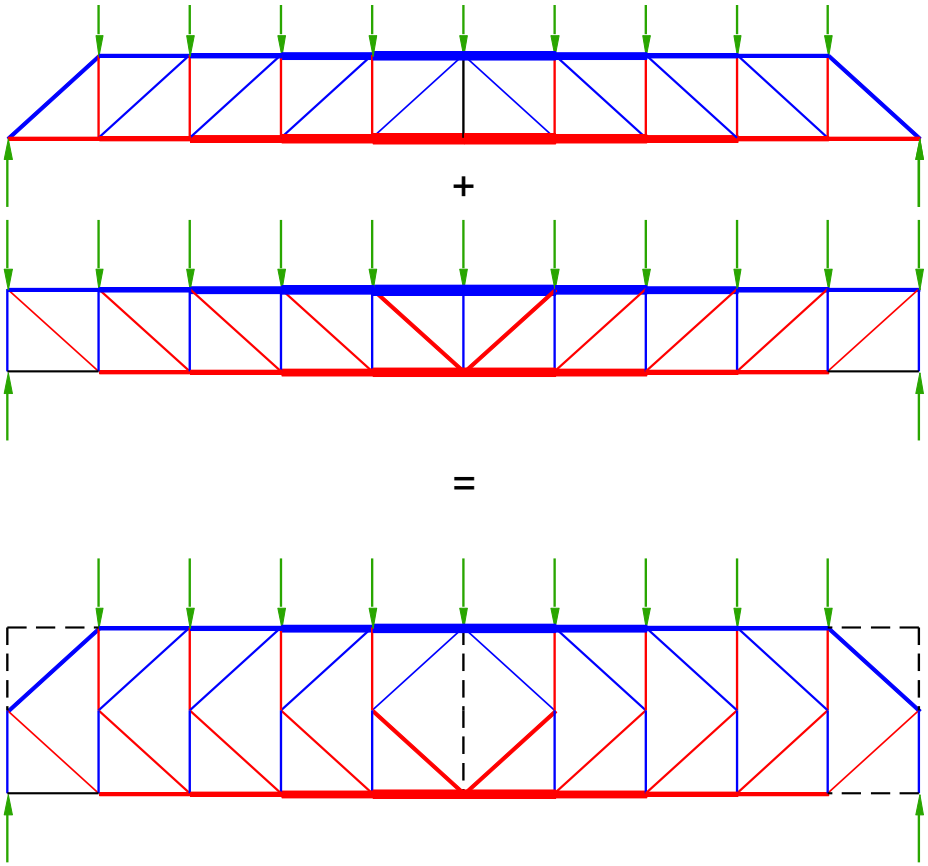
X-Fachwerk mit vorgespannten Pfosten



Doppeldecker «Fairey Swordfish I» | Grossbritannien | 1934

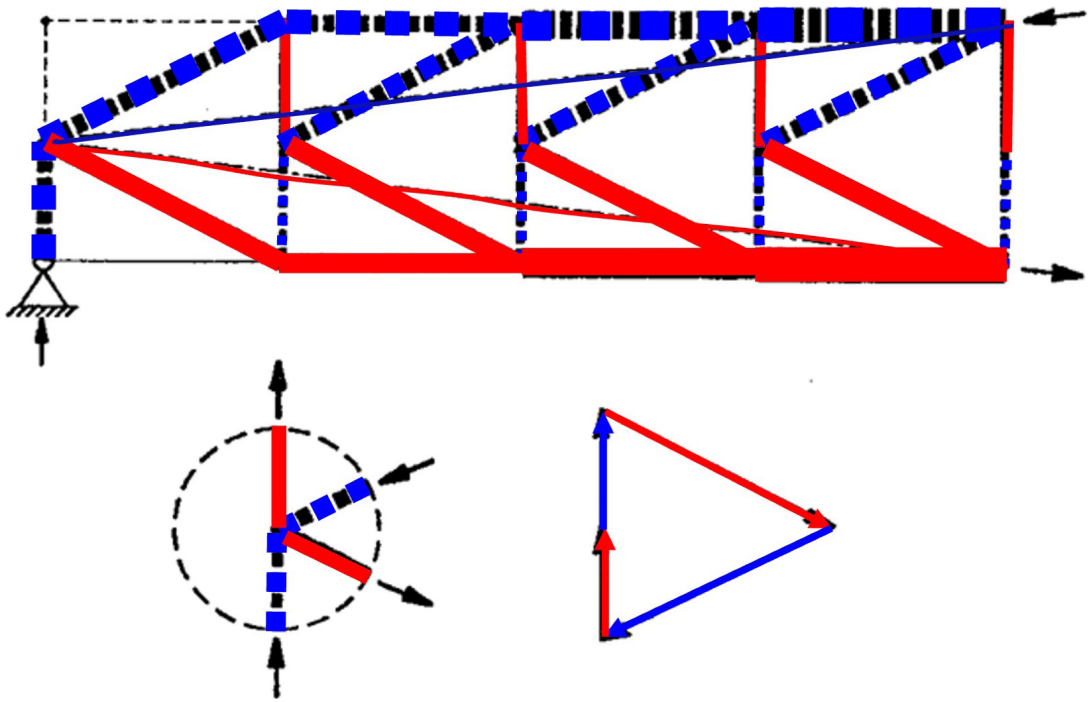
Fachwerke mit K-förmiger Anordnung der Füllstäbe

- Dieser Fachwerktyp ist statisch bestimmt. Demnach können sämtliche innere Kräfte mittels Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden
- Kann als Addition der System Pratt und Howe verstanden werden



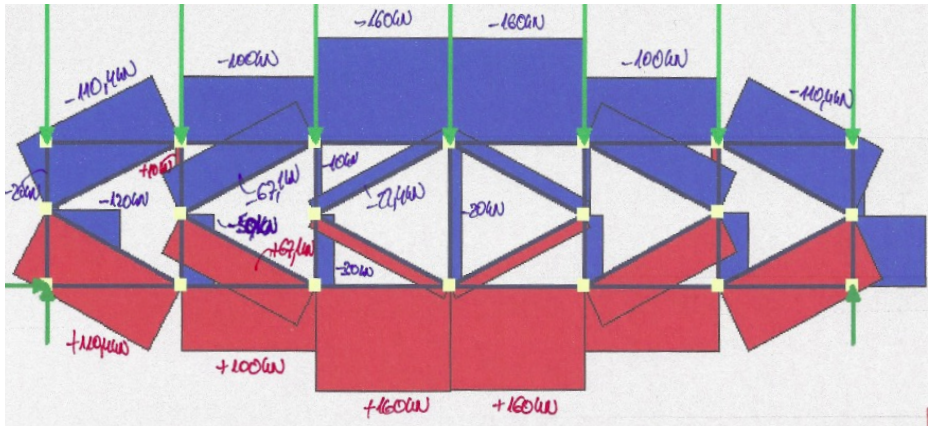
Fachwerke mit K-förmiger Anordnung der Füllstäbe

- Die qualitative Verteilung der Strebenkräfte kann durch ein äquivalentes Bogen-Seil-Tragwerk erkannt werden

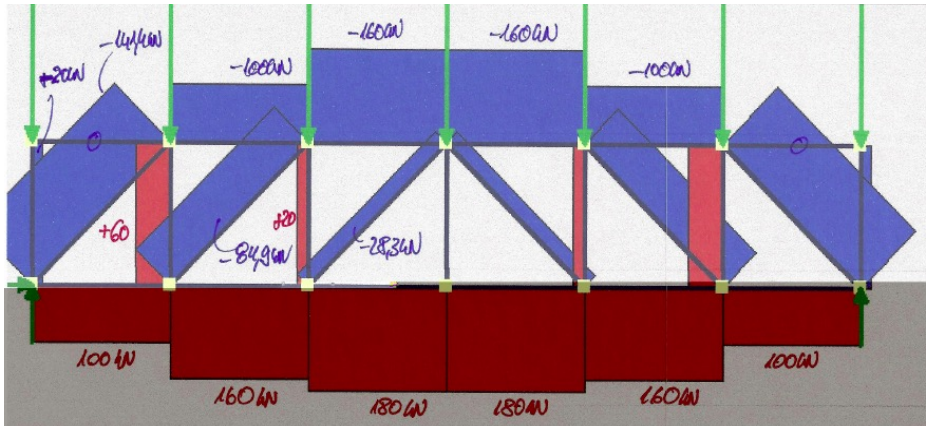


Fachwerke mit K-förmiger Anordnung der Füllstäbe

- Vergleich mit N-förmigen Fachwerk (gleicher Bauhöhe und Belastung):
  - Die Gurtkräfte sind etwa gleich gross
  - Die Strebenkräfte des K-förmigen Fachwerks sind kleiner
  - Die Kräfte in den Randpfosten sind beim K-förmigen Fachwerk grösser
  - Die Knicklängen der Streben und Pfosten sind beim K-förmigen Fachwerk kleiner
  - Der Aufwand zur Herstellung ist allerdings auch grösser beim K-förmigen Fachwerk (mehr Fügungspunkte)



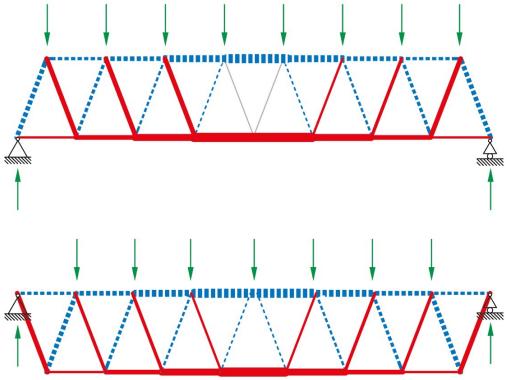
Innere Kräfte eines parallelgurtigen Fachwerks
mit K-förmiger Anordnung der Füllstäbe



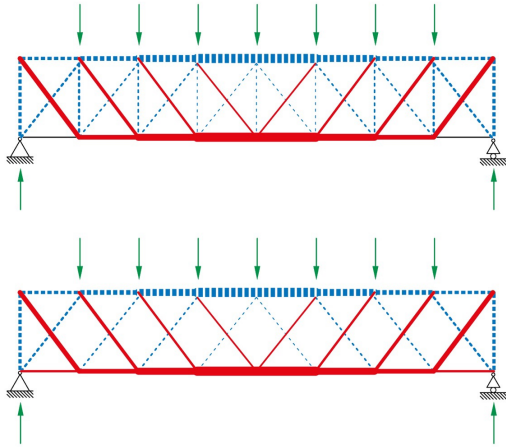
Innere Kräfte eines parallelgurtigen Fachwerks
mit N-förmiger Anordnung der Füllstäbe

Übersicht parallelgurtige Fachwerktypen mit unterschiedlicher Anordnung der Füllstäbe

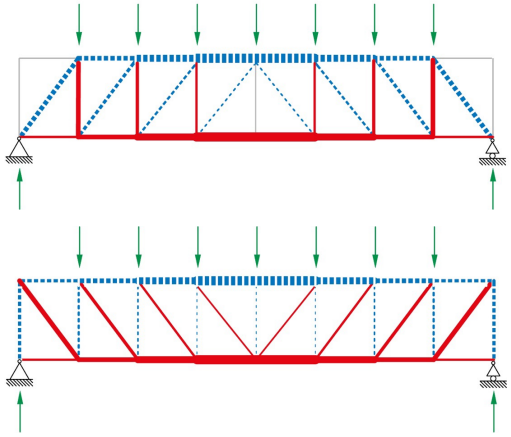
Streben-Fachwerk
- Wenn in den Knoten des Untergurts auch äussere Lasten wirken sollen sind ggf. vertikale Druck-pfosten nötig.



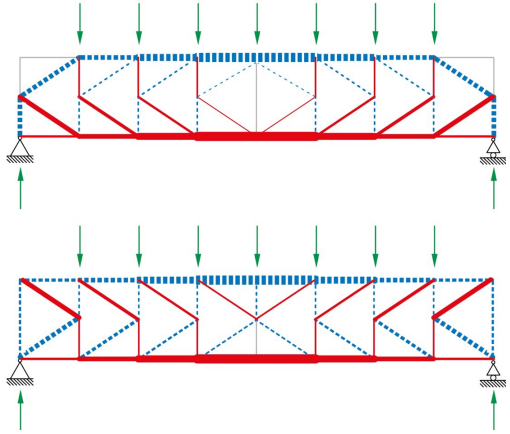
X-Fachwerk
- Diagonalen sind weniger beansprucht als bei anderen Fachwerken
- ohne Pfosten einfach statisch unbestimmt
- mit Pfosten mehrfach statisch unbestimmt



Pfosten-Streben-Fachwerk



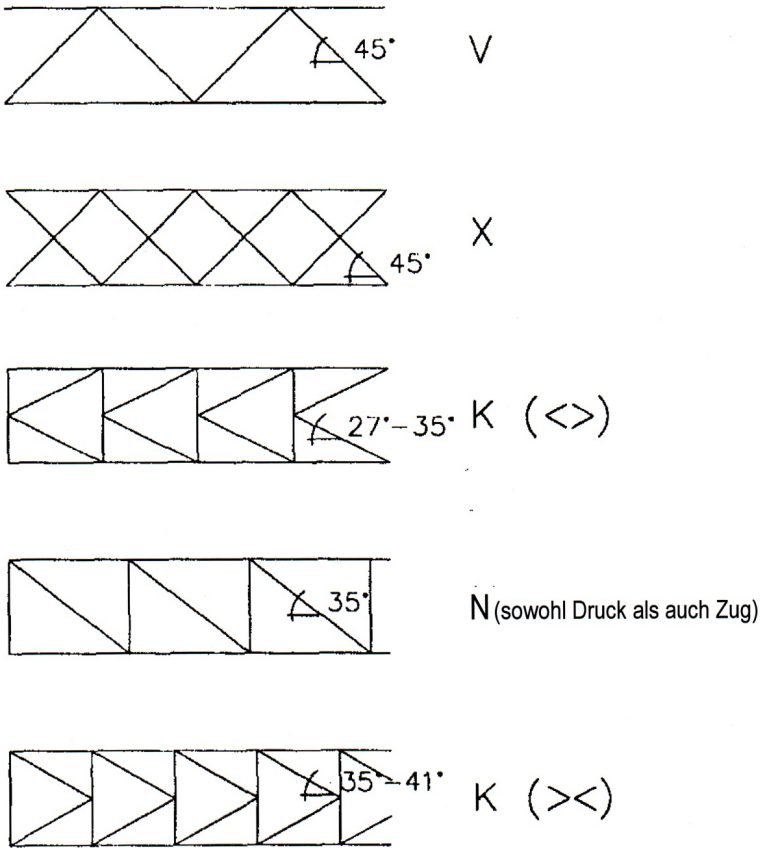
K-Fachwerk



Vergleich der inneren Kräfte verschiedener Anordnungen der Füllstäbe (unter gleicher äusserer Last sowie gleicher Bauhöhe und Spannweite)

Optimale Neigungswinkel der diagonalen Füllstäbe bei parallelgurtigen Fachwerktypen

- Damit ein Fachwerk in effizienter Weise Kräfte abtragen kann, sollte der Neigungswinkel der Streben nicht zu klein sein, sonst werden die inneren Kräfte zu gross.
- Aus wirtschaftlichen Gründen sollte der Neigungswinkel aber auch nicht zu gross sein, da sonst zu viele Elemente und Verbindungen gebraucht werden.



Neigungswinkel der Diagonalen bei minimaler erforderlicher Materialmenge (bei parallelgurtigen Fachwerken)

Nicht-parallelgurtige Fachwerktypen

Parabel-Fachwerkträger

- Der Obergurt ist nach einer Stützlinie infolge ständiger Lasten geformt.
- Der Untergurt ist ein gerades Zugelement welches die Enden des Obergurts verbindet.
- Die Füllstäbe sind gemäss dem Bildungsgesetz für Fachwerke ausformuliert.



Lanjarón-Viadukt | Tablate | José Antonio Torroja (Ing.) | 2001
(Zwei Parabel-Fachwerkträger: L = 112.6 m, f = 15 m, L/f = 7.5)



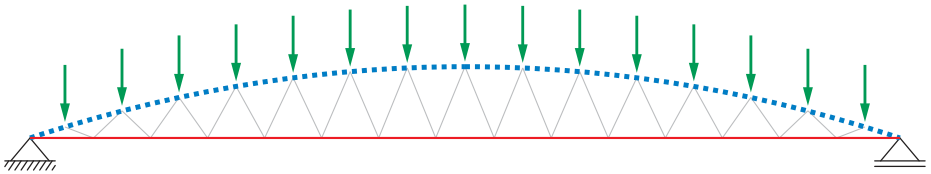


Einschub des Brückenträgers

Quelle: links: URL https://structurae.net/de/bauwerke/tablate-bruecke, Zugriff am 25.11.2025
re.o.: URL http://torrojaingenieria.es/HTML/TrabDetalle.php?Proyecto=131&texto1=View%20map&lang=en, Zugriff am 25.11.2025
re.u.: URL http://torrojaingenieria.es/HTML/TrabDetalle.php?Proyecto=131&texto1=View%20map&lang=en, Zugriff am 25.11.2025

Parabel-Fachwerkträger

- Lastabtrag von ständigen Lasten:
  - Die Gurte bilden ein Bogen-Seil-Tragwerk (Stützlinie mit Zugelement)
  - Die Diagonalen haben keine inneren Kräfte.



Innere Kräfte im Lastfall «Ständige Lasten»



Lanjarón-Viadukt | Tablate | José Antonio Torroja (Ing.) | 2001
(Zwei Parabel-Fachwerkträger: L = 112.6 m, f = 15 m, L/f = 7.5)



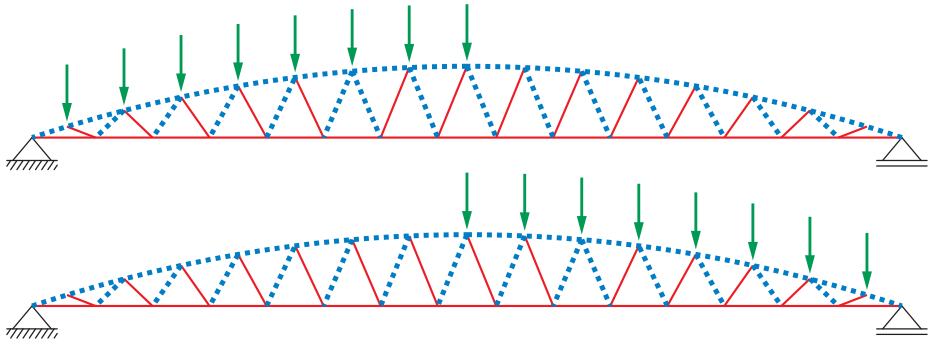


Einschub des Brückenträgers

Quelle: links: URL https://structurae.net/de/bauwerke/tablate-bruecke, Zugriff am 25.11.2025
re.o.: Autor
re.u.: URL http://torrojaingenieria.es/HTML/TrabDetalle.php?Proyecto=131&texto1=View%20map&lang=en, Zugriff am 25.11.2025

Parabel-Fachwerkträger

- Lastabtrag von veränderlichen Lasten welche nicht affin zur Stützlinie sind:
  - Die Struktur wirkt als Fachwerk.



Innere Kräfte für die Lastfälle «Einseitige veränderliche Lasten»



Lanjarón-Viadukt | Tablate | José Antonio Torroja (Ing.) | 2001
(Zwei Parabel-Fachwerkträger: L = 112.6 m, f = 15 m, L/f = 7.5)





Einschub des Brückenträgers

Quelle: links: URL https://structurae.net/de/bauwerke/tablate-bruecke, Zugriff am 25.11.2025
re.o.: Autor
re.u.: URL http://torrojaingenieria.es/HTML/TrabDetalle.php?Proyecto=131&texto1=View%20map&lang=en, Zugriff am 25.11.2025

Fischbauchträger

- Parabel-Fachwerkträger mit Gurten welche ein Bogen-Seil-Tragwerk als Seillinie mit Druckelement bilden.

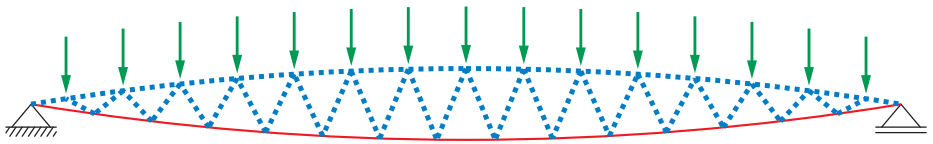


Quelle: URL https://www.zrs.berlin/project/betriebsgebaude-artis-berlin/, Zugriff am 25.11.2025

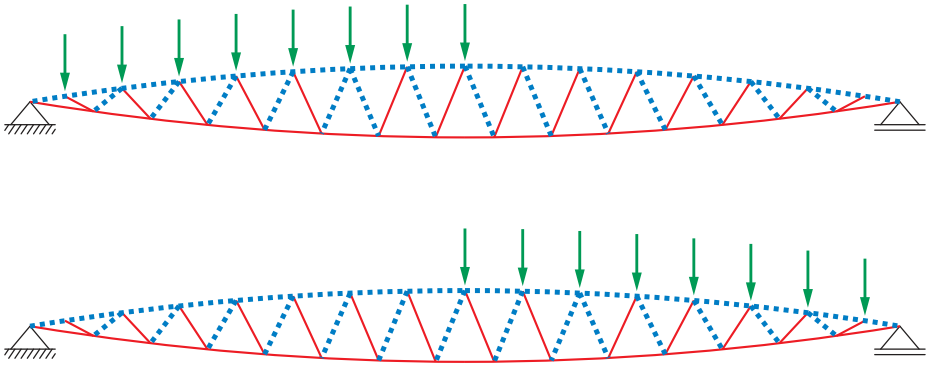
Betriebsgebäude Artis | Berlin | Roswag Architekten (Arch.); Ziegert I Seiler Ingenieure (Ing.) | 2012

Linsenförmiger Fachwerkträger (mit V-förmigen Füllstäben)

- Der Obergurt ist nach einer Stützlinie infolge ständiger Lasten geformt.
- Der Untergurt ist nach einer Seillinie infolge ständiger Lasten geformt.
- Die Füllstäbe sind gemäss dem Bildungsgesetz für Fachwerke ausformuliert.
- Lastabtrag von ständigen Lasten:
  - Gemäss dem Verhältnis der Pfeilhöhen von Stütz- und Seillinie erfolgt die Verteilung der ständigen Lasten anteilig auf die Stützlinie und anteilig auf die Seillinie.
  - Die Füllstäbe ermöglichen ein Übertragung der am Obergurt angreifenden Lasten auf den Untergurt.
- Lastabtrag von veränderlichen Lasten welche nicht affin zu Stütz- und Seillinie sind:
  - Die Struktur wirkt als Fachwerk.



Innere Kräfte im Lastfall «Ständige Lasten»
Lastabtrag als Bogen-Seil-Tragwerk



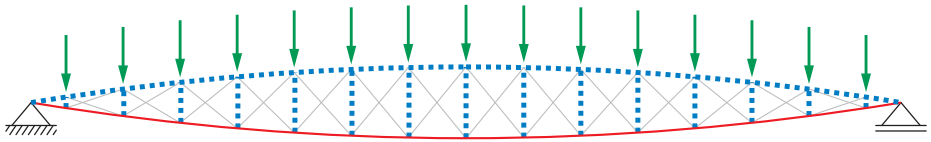
Innere Kräfte für die Lastfälle «Einseitige veränderliche Lasten»
Lastabtrag als Fachwerk

Linsenförmiges Fachwerk (mit X-förmigen Füllstäben)

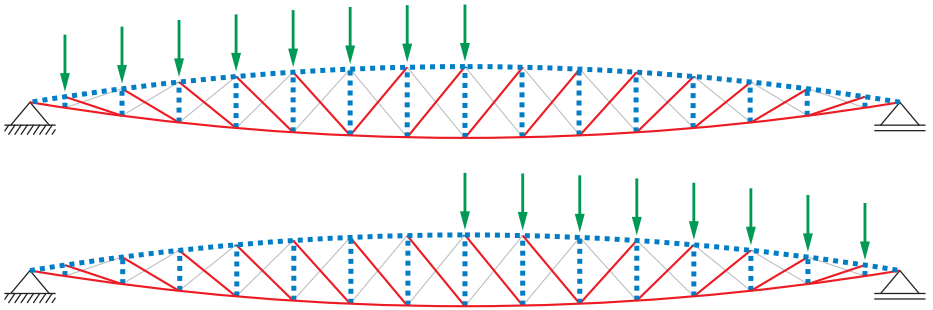


Messehalle 4 | Hannover | Gerkan Marg + Partner (Arch.); Schlaich Bergermann Partner (Ing.) | 1995
(Halle: 132 x 184 x 17 m; Fachwerkträger: L = 122 m, f = 9 m, L/f = 13.5; Abstand Fachwerkträger: s = 10.8 m)

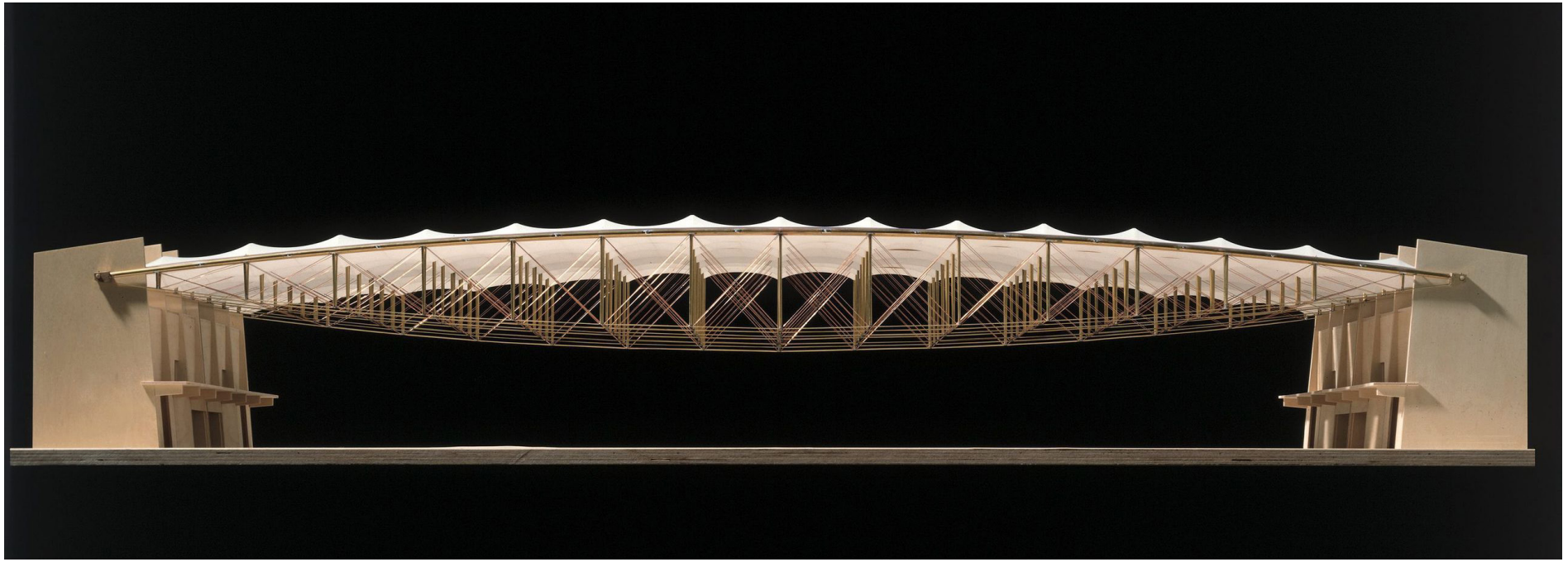
Linsenförmiges Fachwerk



Innere Kräfte im Lastfall «Ständige Lasten»
Lastabtrag als Bogen-Seil-Tragwerk



Innere Kräfte für die Lastfälle «Einseitige veränderliche Lasten»
Lastabtrag als Fachwerk (X-Fachwerk, da die Diagonalen nur Zug aufnehmen können wird jeweils nur eine der beiden beansprucht)



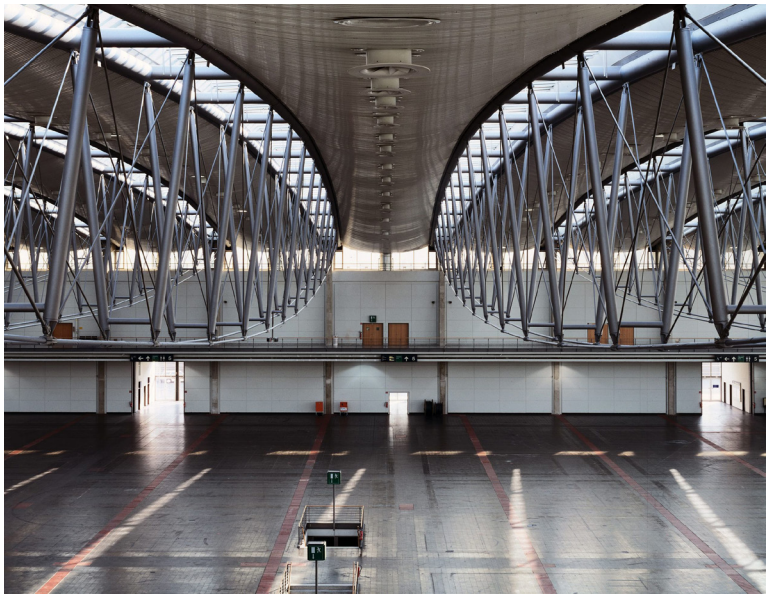
Messehalle 4 | Hannover
(Tragwerksmodell)

Linsenförmiges Fachwerk



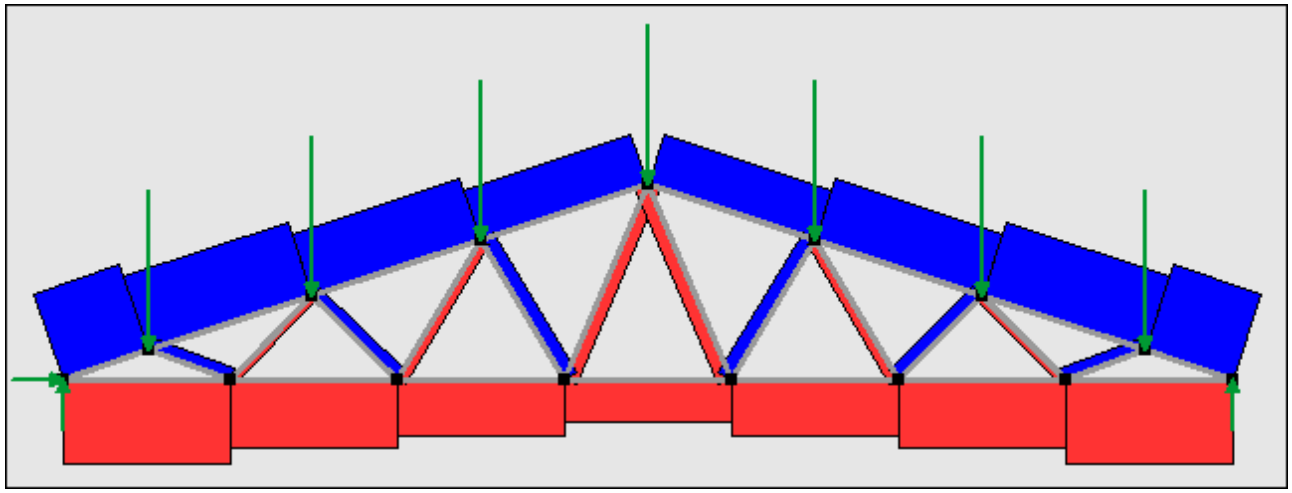
Messehalle 4 | Hannover





Dachtragwerk

Dreiecksförmiges Fachwerk



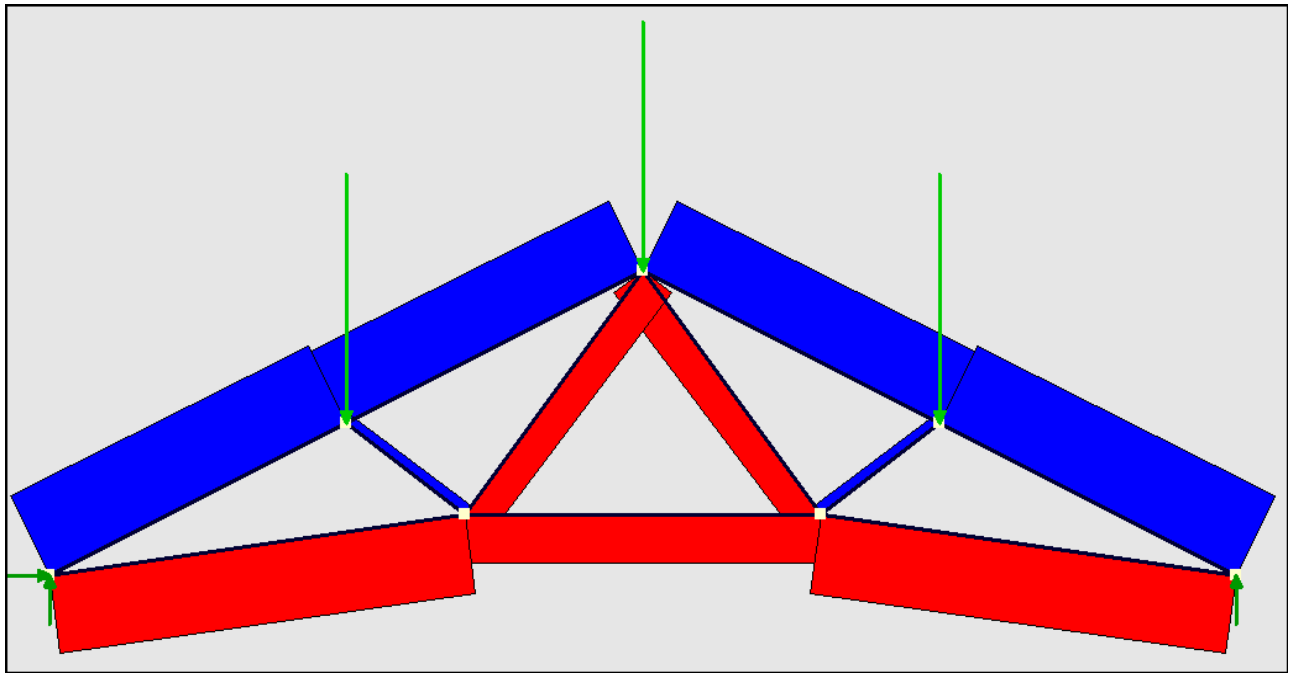
- Form ergibt sich aus Nutzung, z.B. Verlauf des Daches
- Diagonalen entgegengesetzt beansprucht als bei Fachwerk mit konstanter Höhe
- Maximale Gurt-beanspruchung bei Auflagern (für symetr. Laststellungen)

System Polonceau



Exerzierhalle | Wittenberg | 1886
(Spannweite 14 m; Abstand Polonceau Träger 4 m)

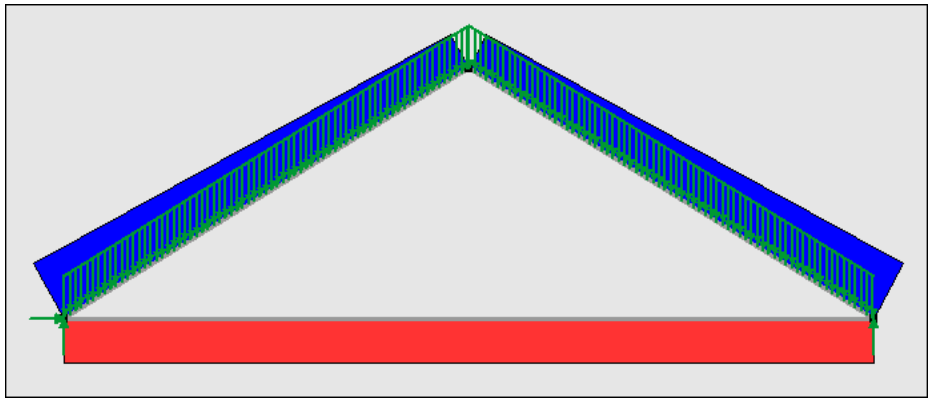
System Polonceau



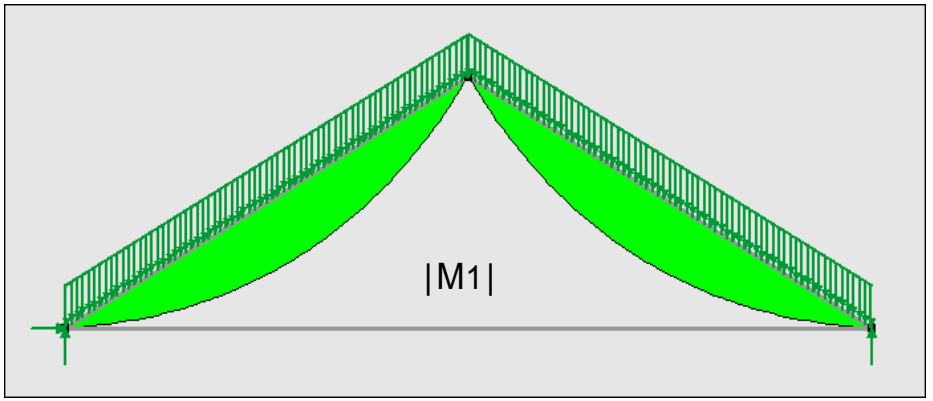
- Kombination von zwei geneigten unterspannten Trägern mit Zugband
- Maximale Beanspruchung der Stäbe bei den Auflagern
- sehr grosse Transparenz da inneren Elemente auf Zug beansprucht

System Polonceau

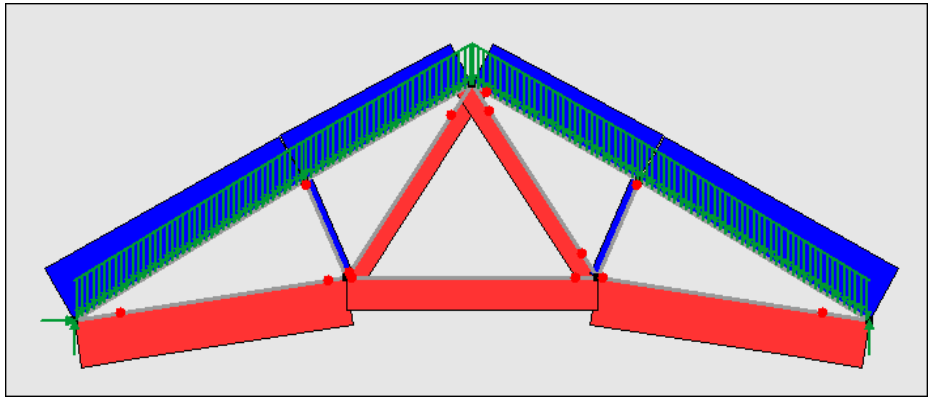
- Sparrendach im Vergleich zu Polonceau Träger:
  Die durchlaufenden Sparren verringern ihren Biegeanteil durch Unterspannung



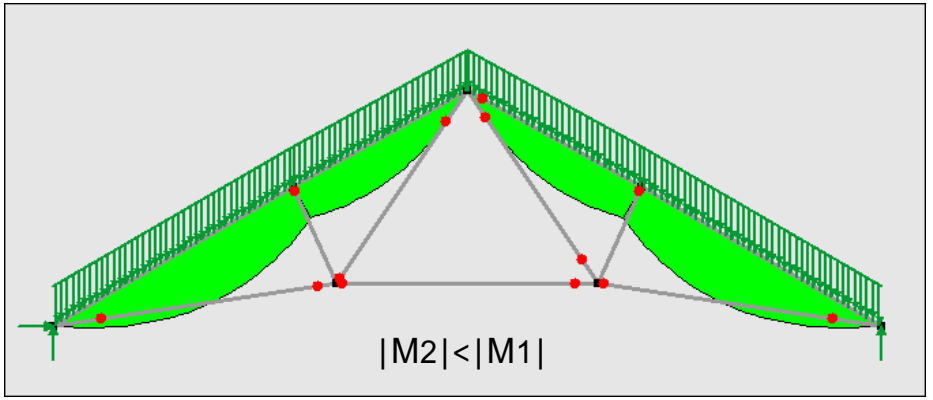
Sparrendach mit Zugband: Innere Zug- und Druckkräfte (Normalkräfte)



Sparrendach mit Zugband: Biegemomente



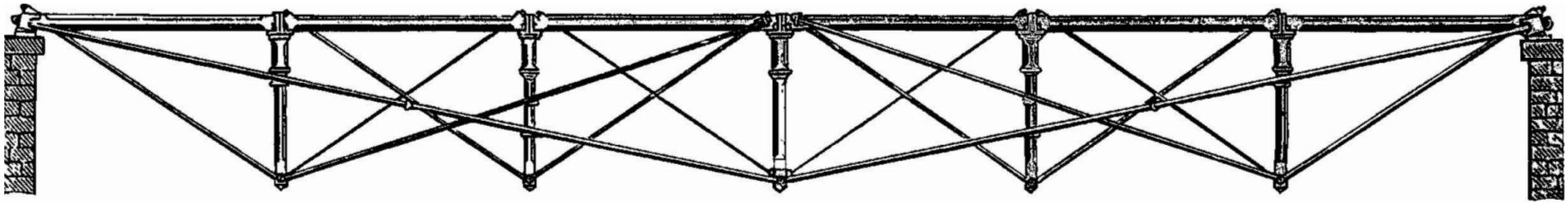
Polonceau Träger: Innere Zug- und Druckkräfte (Normalkräfte)



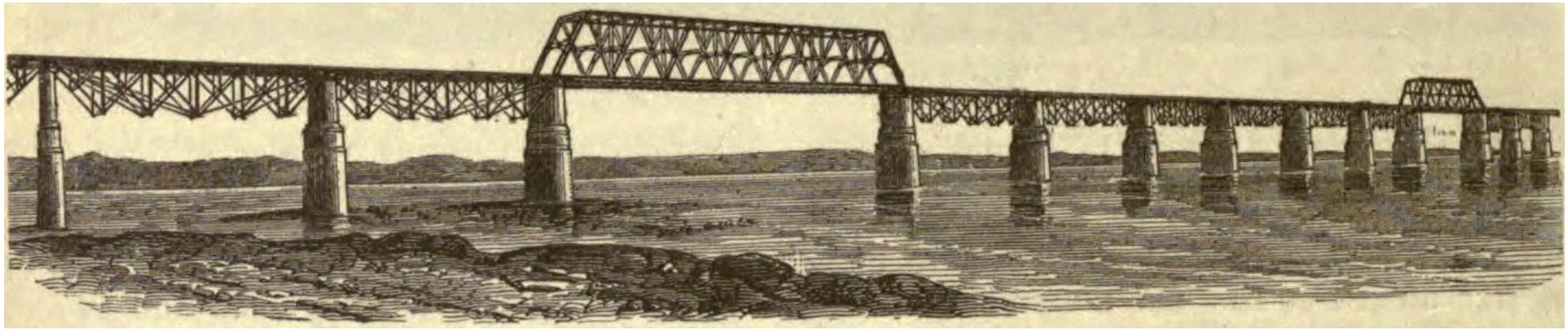
Polonceau Träger: Biegemomente

Fink Träger

- Überlagerung mehrerer unterspannter Träger
- Statisch bestimmt oder unbestimmt möglich
- Obergurt und Pfosten stets Druck
- Streben stets auf Zug beansprucht, auch unter asymmetrischen Lasten



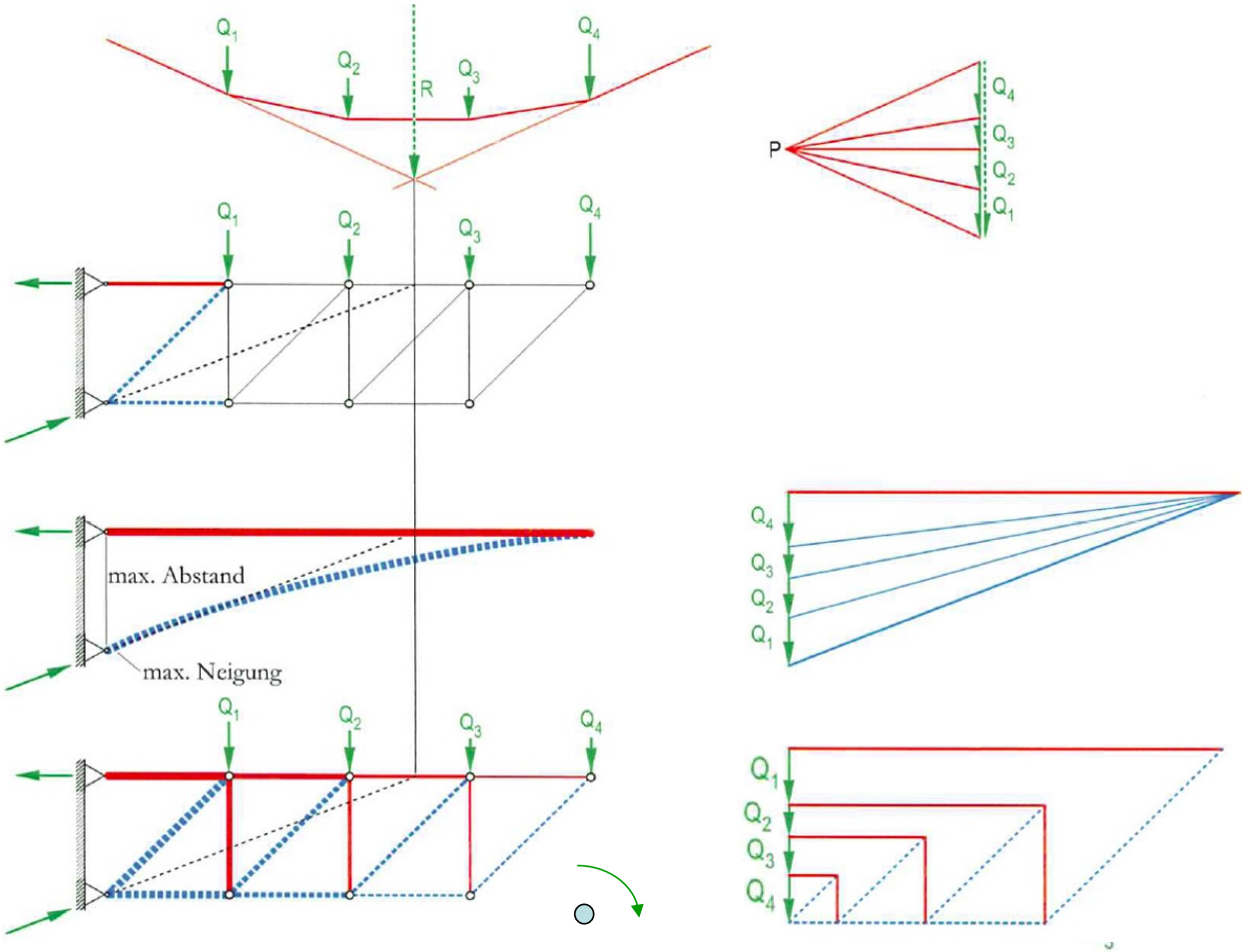
Fink Träger | Albert Fink | 1850 (Patent)
(hier statisch unbestimmte Variante; statische Unbestimmtheit bedeutet ein steiferes Tragwerk mit kleineren Verformungen)



Brücke über den Ohio River | Louisville | 1874

Konsolen als Fachwerk

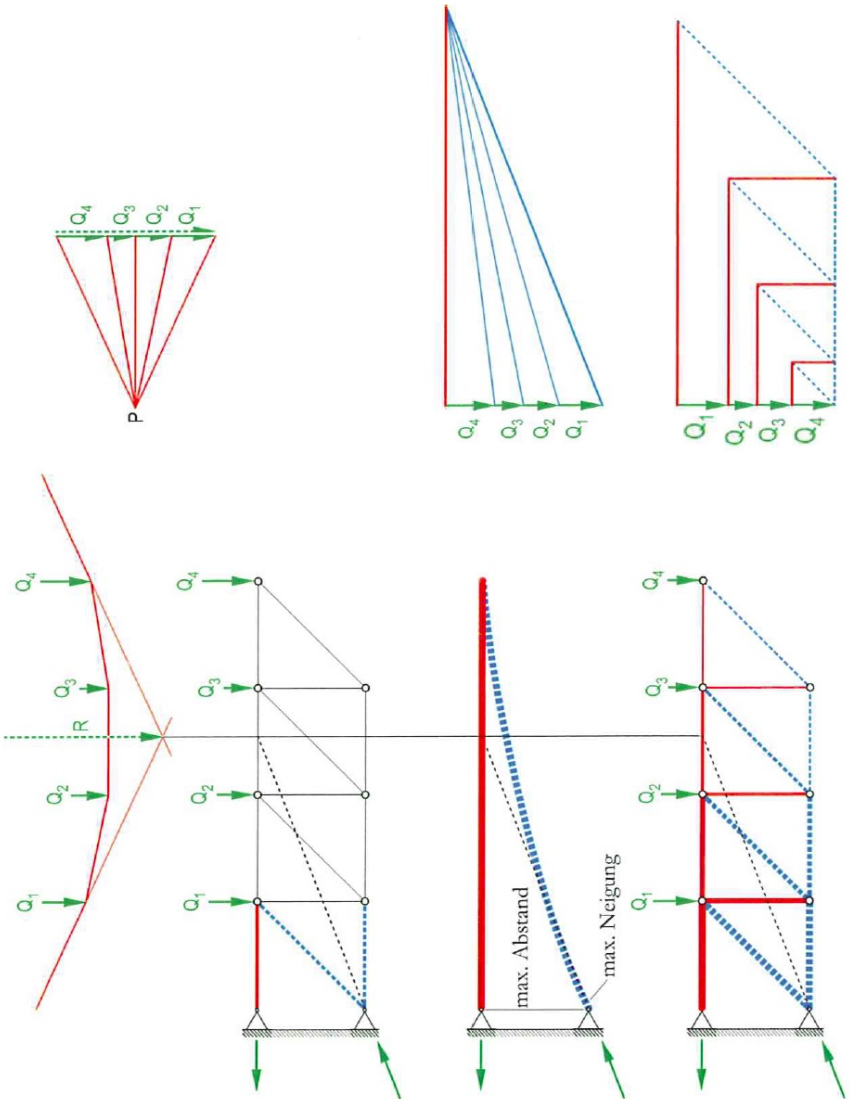
Analyse der inneren Kräfte



Umfahrungssinn Knoten

- Analyse der inneren Kräfte gleich wie bei Fachwerk, das auf beiden Seiten gelagert ist
- Analyse über Cremonaplan
- Bei Konsolen, als statisch bestimmte Fachwerke, müssen die Auflagerkräfte nicht zuerst bestimmt werden => direkt Knotengleichgewicht möglich
- Analyse über äquivalentes Bogen-Seil-Tragwerk

Analogie zwischen Türmen und Konsolen



Umfahrungssinn Knoten

Vorgehen zur Ermittlung der Stabkräfte

- Ermittlung der Resultierenden der äusseren Lasten mit Hilfe des Seilpolygonverfahrens
- Einpassen/Erstellen eines hybriden Seiltragwerks
- Erkennen von Zug und Druck mit Hilfe der Analogie
- **oder:** Ermittlung der Stabkräfte mit dem Cremonaplan (wobei Ermittlung der Auflagerkräfte am Anfang nicht notwendig bei der Konsole)

Es gilt:

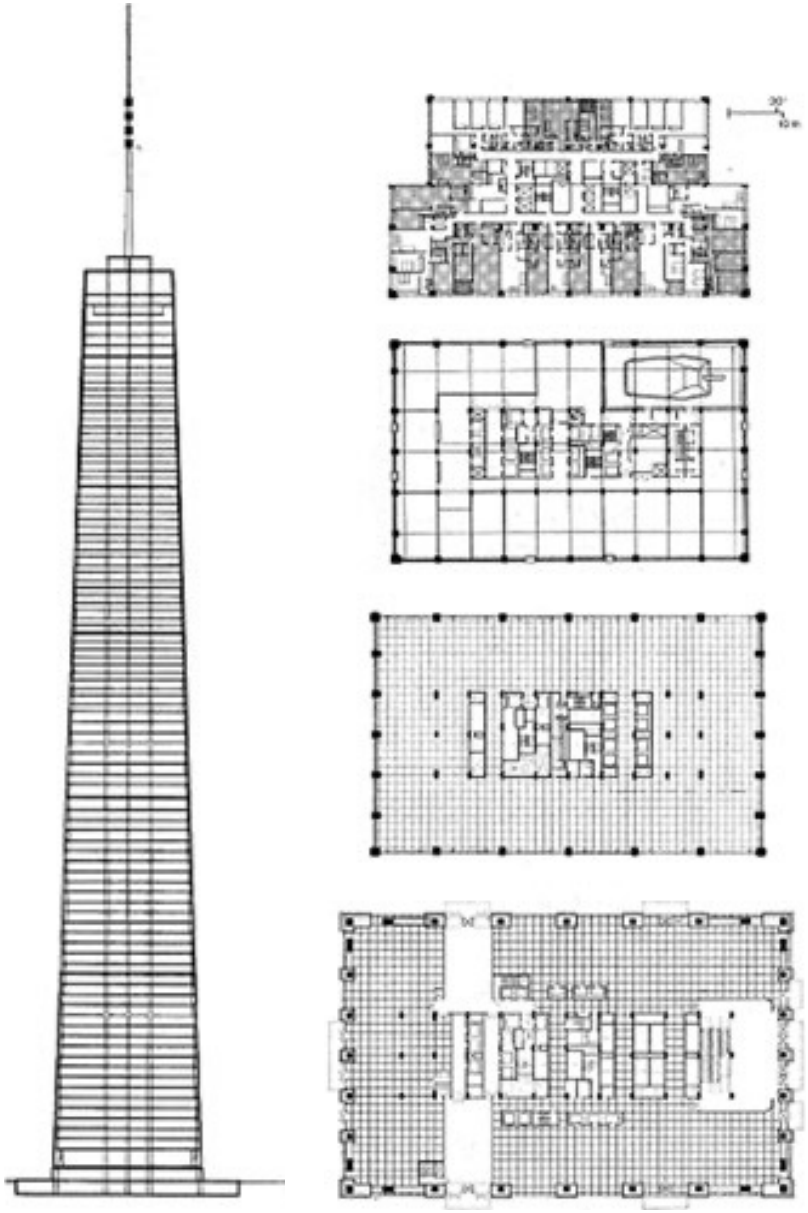
- Grösste Neigung des Bogens des Bogen-Seil-Tragwerkes bei den Auflagern

=> Kräfte in Diagonalen bei Auflagern maximal

- Grösste Pfeilhöhe Bogen-Seil-Tragwerk bei Auflagern

=> Kräfte in den Gurten bei Auflagern maximal

14





John Hancock Center | Chicago | Skidmore, Owings & Merrill (Architekten); Fazlur Khan (Ingenieur) | 1969
(Höhe H = 344 m)

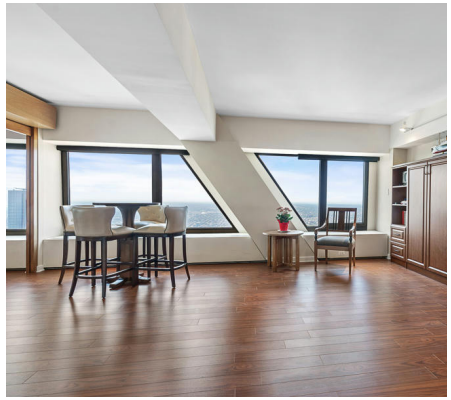




John Hancock Center | Chicago
(Bauphase)



John Hancock Center | Chicago
(Fassade)

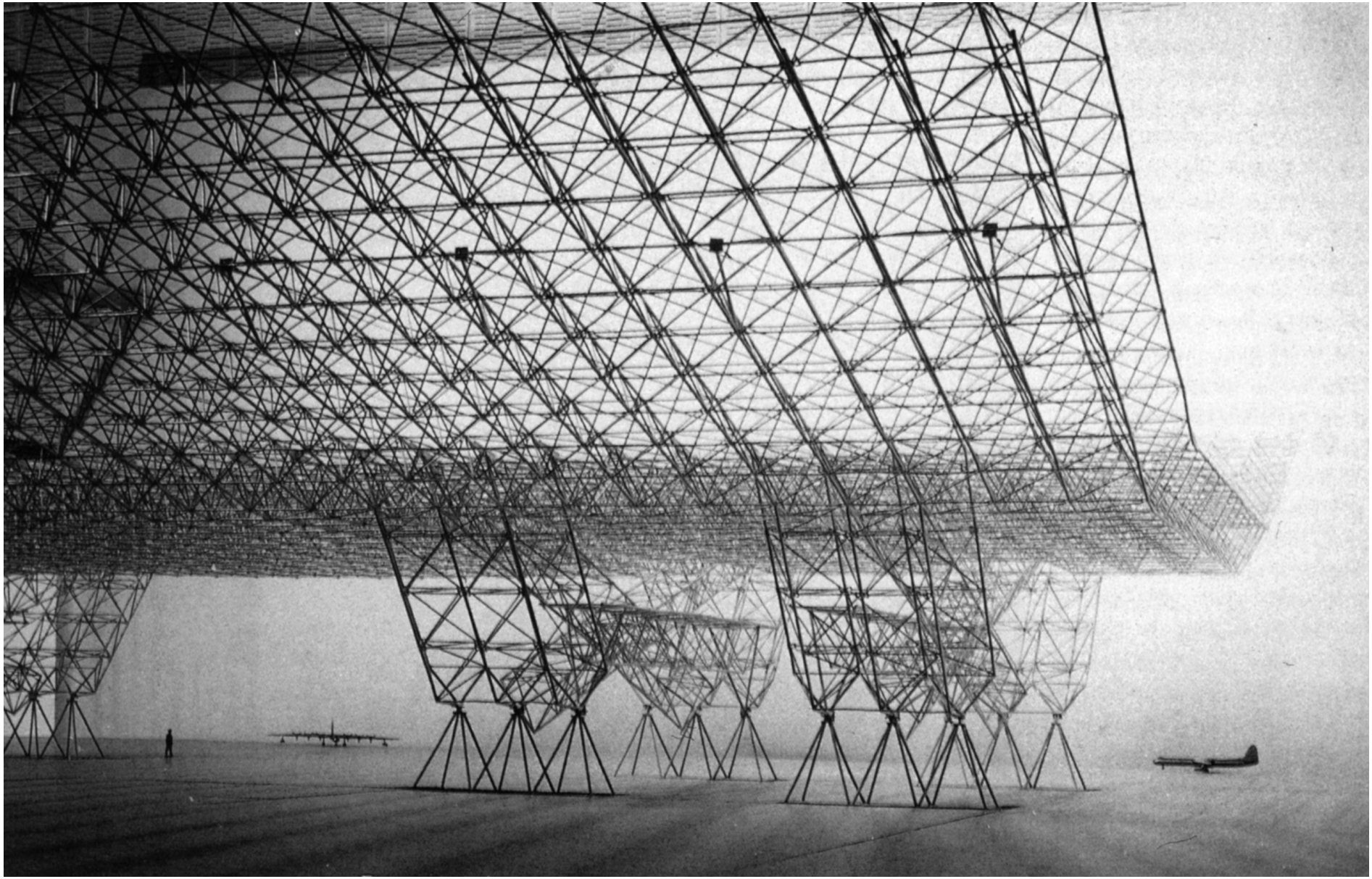






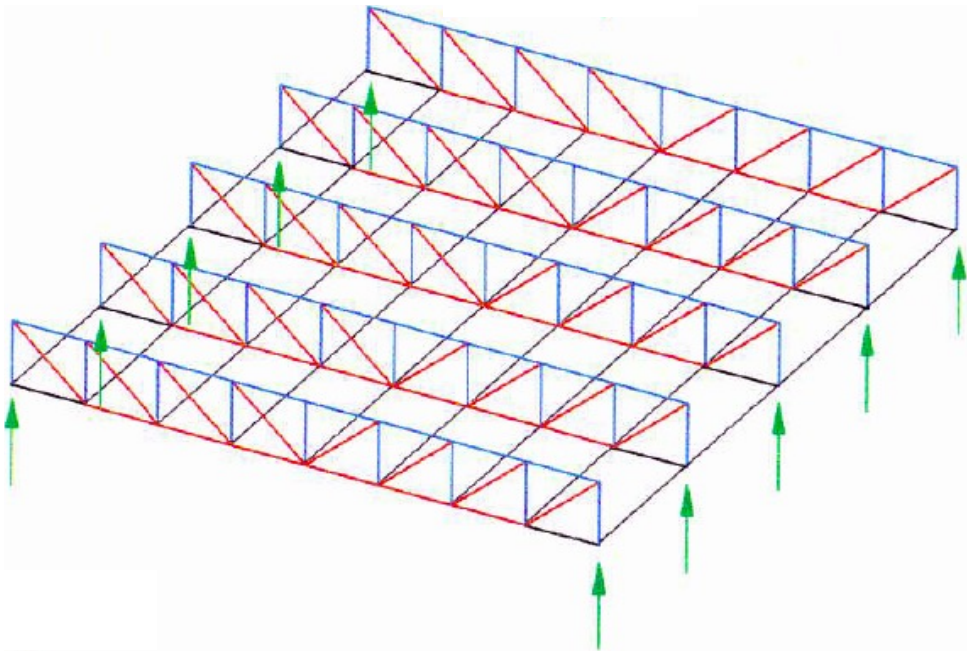
Innenräume

Räumliche Fachwerke



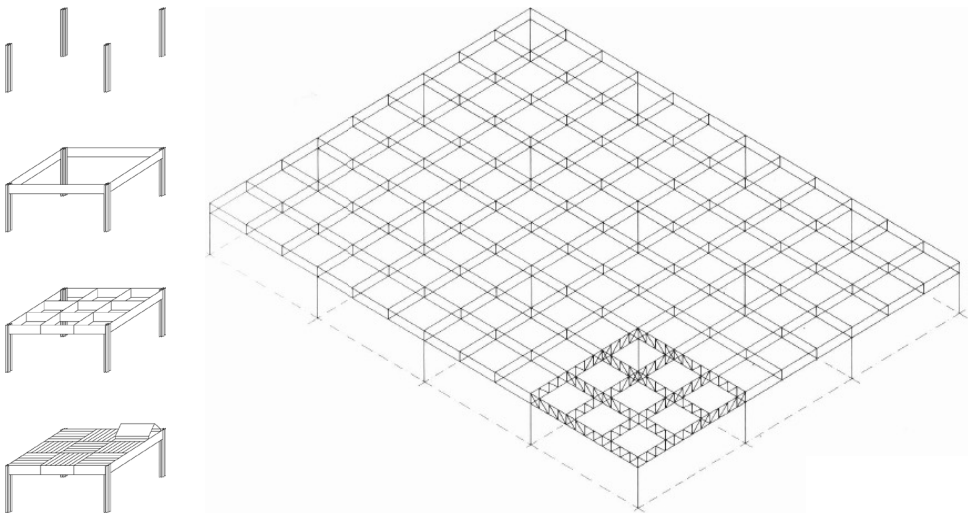
Flugzeughangar für die US Air Force (Projekt) | Konrad Wachsmann (Architekt) | 1951

Serie von Fachwerkträgern

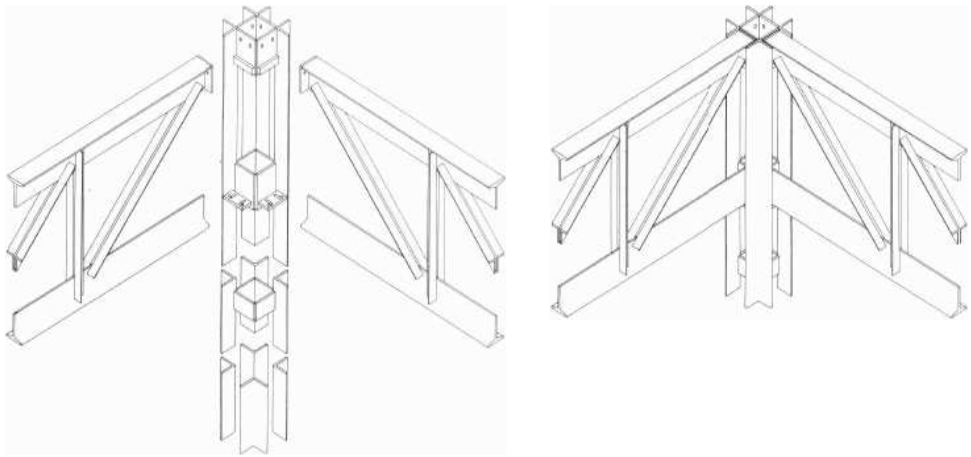


- Primärtragwerk aus in Serie angeordneten Fachwerken parallel zur Dachebene
- Sekundärtragwerk trägt ständige und veränderliche Lasten zu den Fachwerken
- Das Sekundärtragwerk (Balken oder Platten) kann auf Obergurt oder Untergurt der Fachwerke aufgelagert werden
- Bei abwechselnder Lage des Sekundärtragwerks auf Ober- und Untergurt der Fachwerke
  => Shed Dach

Fachwerkträgerrost



Das modulare System besteht aus Grundelementen mit 14 x 14 m



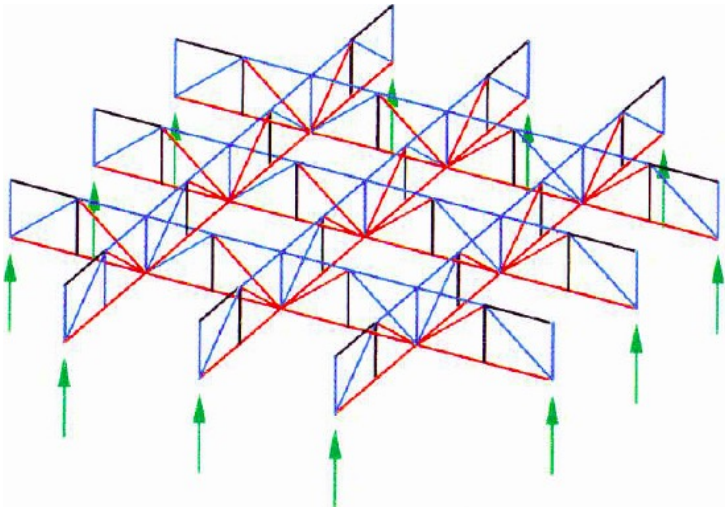
Eck-, Rand und Innenstützen basieren auf der gleichen Grundkonstruktion

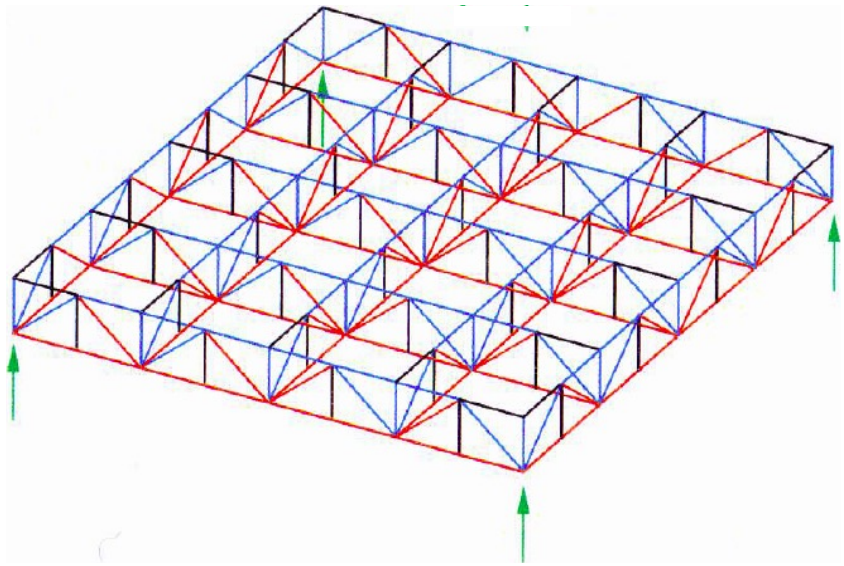




Fabrikhalle USM | Münsingen | Fritz Haller (Architekt);
Emch & Berger (Ingenieure) | 1963

Fachwerkträgerrost





•Sekundärtragwerk wird durch diese Anordnung überflüssig

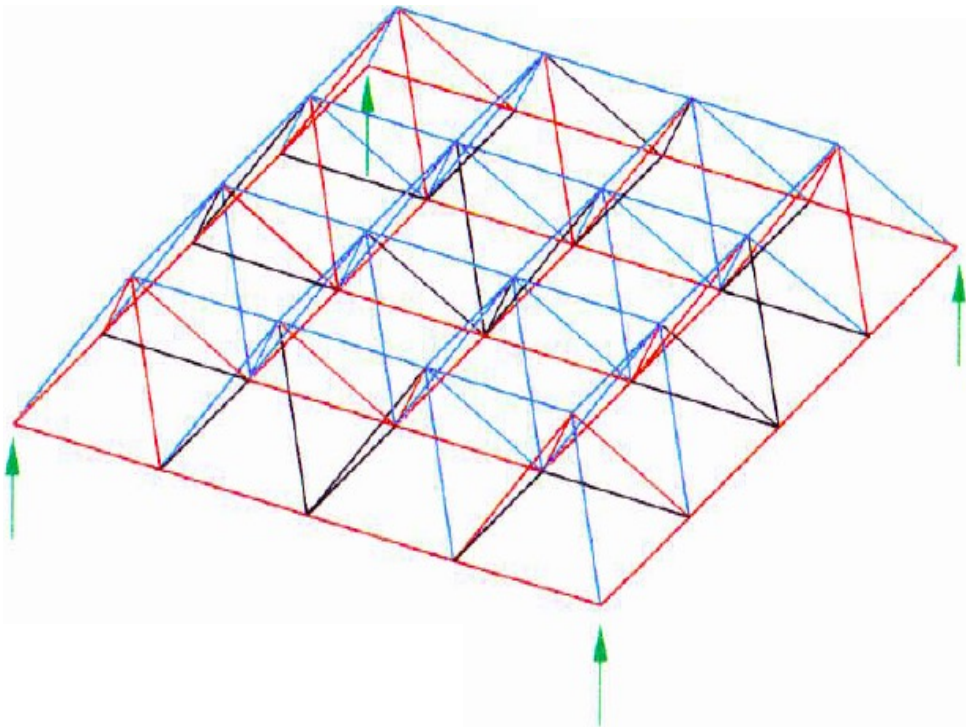
• Lastabtrag in zwei Richtungen zu den Auflagern durch Fachwerkrost
=> Auflager auf allen vier Seiten notwendig

• Richtungen der Fachwerke müssen nicht rechtwinklig zueinander sein

• nur sinnvoll wenn das Verhältnis der beiden Seiten der rechteckigen Grundfläche a/b = 1.0 bis etwa 1.5 ist!

•Je nach Anordnung der Auflager unterschiedliche Beanspruchung in den jeweiligen ebenen Fachwerken

Raumfachwerk

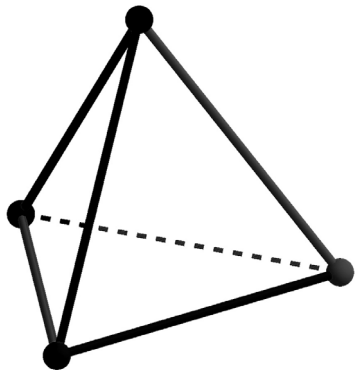


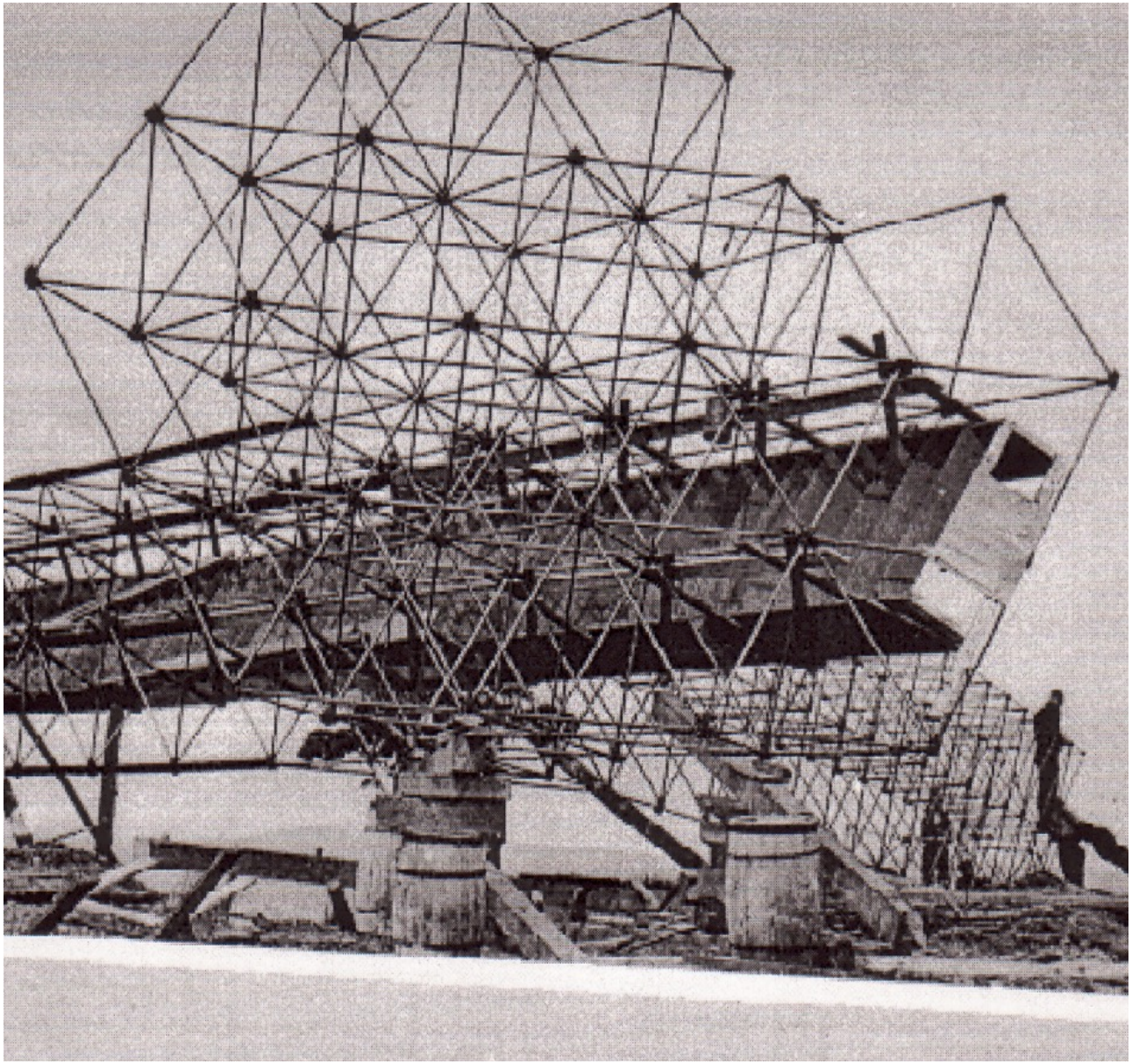
- Steigerung der Effizienz der Fachwerkroste durch Anordnung der Diagonalen mit Verbindung zu den in beiden Richtungen verlaufenden Gurten
  => geringerer Materialverbrauch
- Durch diese räumliche Anordnung der Diagonalen entstehen Strukturen aus nur Tetraedern oder Strukturen als Kombination von Tetraedern und Pyramiden
- Diese Art von Struktur ermöglicht Raumfachwerke verschiedener Formen
- bei Verwendung von nur Tetraedern ist Formenvielfalt stärker eingeschränkt, als bei Verwendung Pyramiden und Tetraedern

Raumfachwerk

Raumfachwerk aus Tetraedern

- Grundelement ist ein Tetraeder



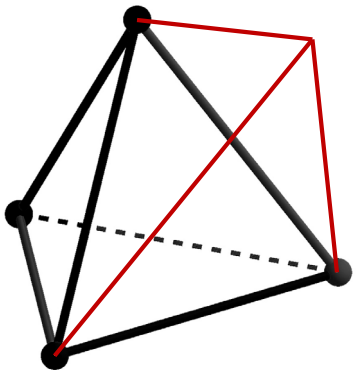


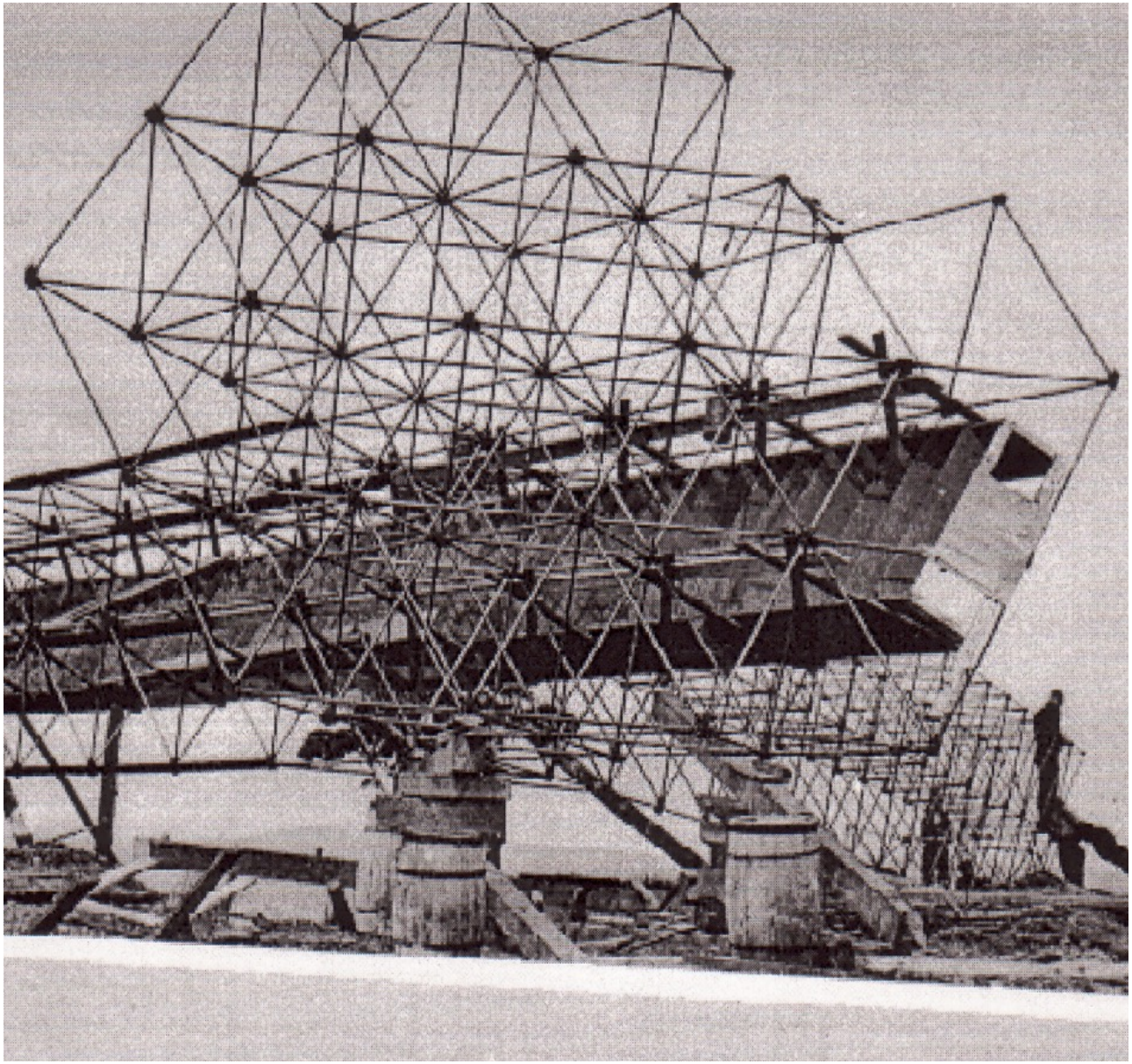
Raumfachwerk aus vorfabrizierten Tetraedern | Alexander Graham Bell | 1904 (Patent)

Raumfachwerk

Raumfachwerk aus Tetraedern

- Grundelement ist ein Tetraeder
- Erweiterung um 3 Stäbe die jeweils gelenkig an bestehende Knoten angeschlossen sind und auch selbst in einem neuen Knoten gelenkig verbunden sind.



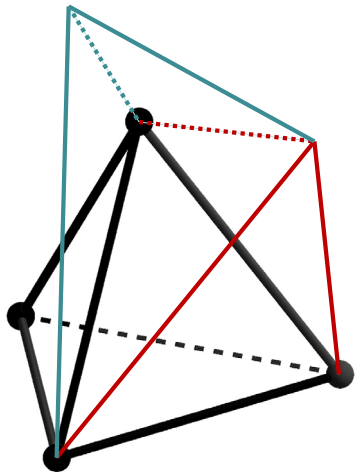


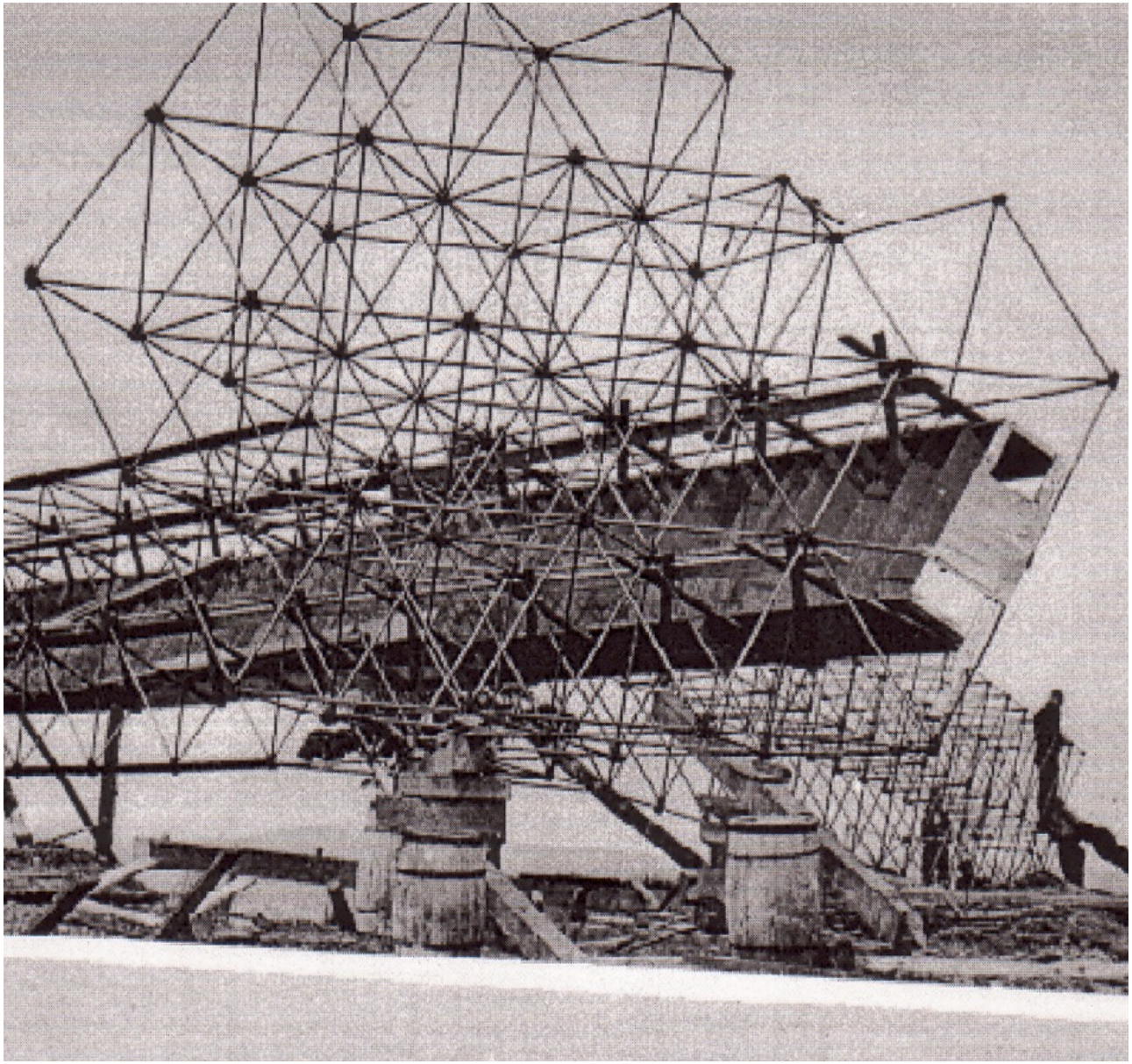
Raumfachwerk aus vorfabrizierten Tetraedern | Alexander Graham Bell | 1904 (Patent)

Raumfachwerk

Raumfachwerk aus Tetraedern

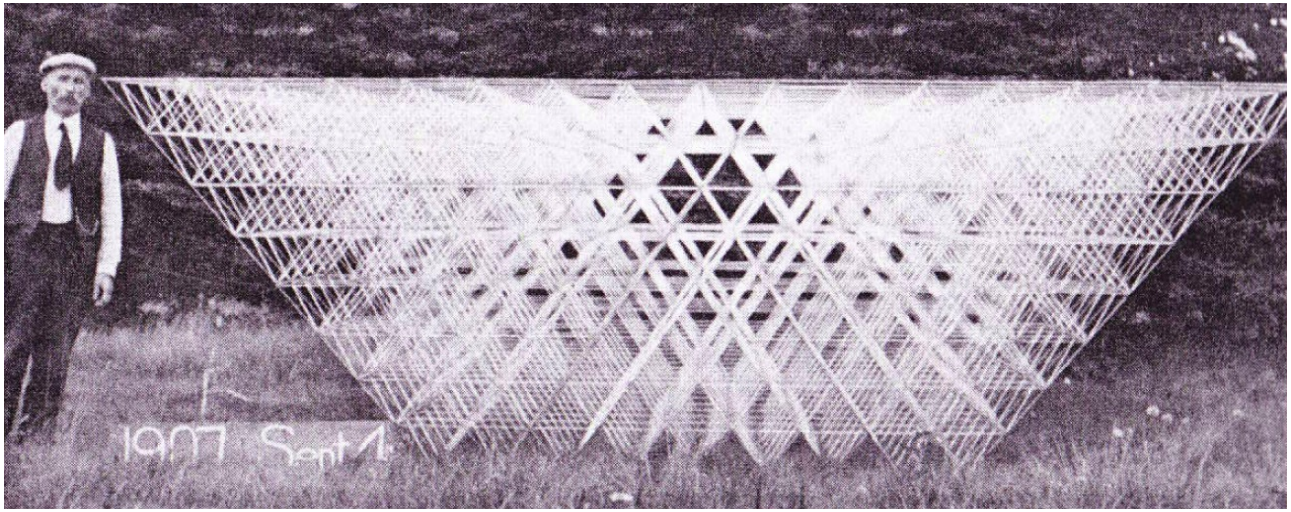
- Grundelement ist ein Tetraeder
- Erweiterung um 3 Stäbe die jeweils gelenkig an bestehende Knoten angeschlossen sind und auch selbst in einem neuen Knoten gelenkig verbunden sind.

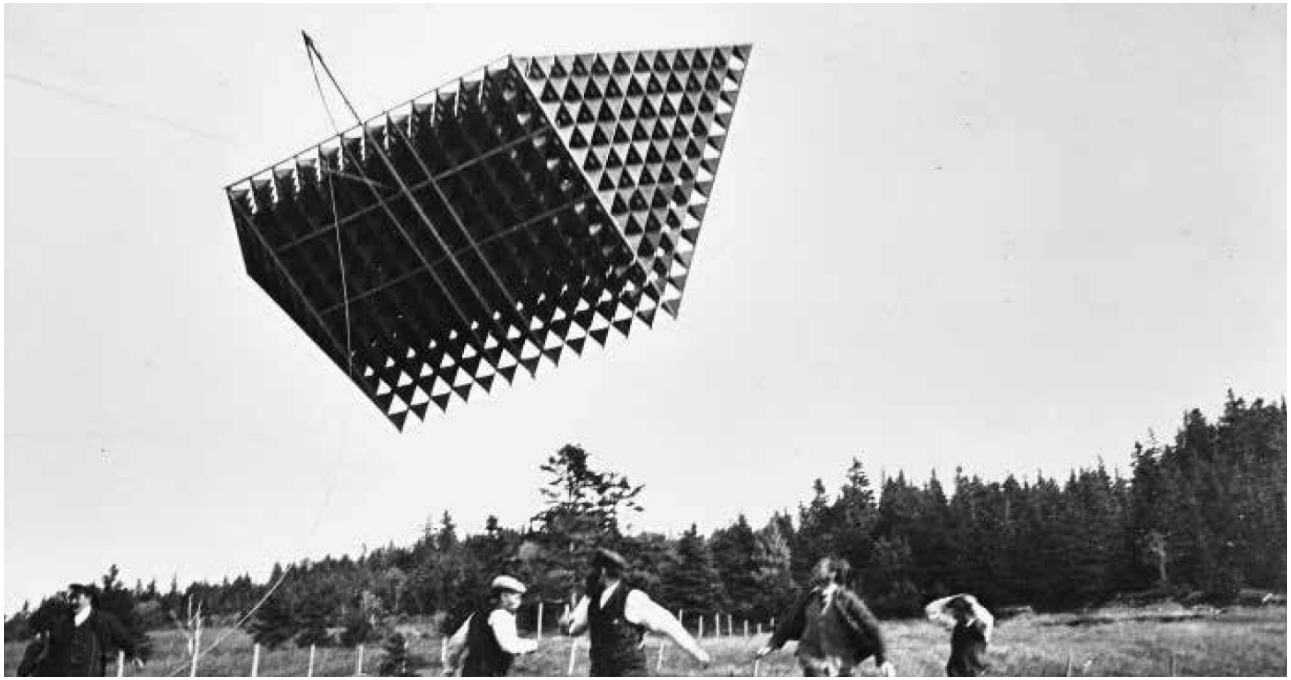




Raumfachwerk aus vorfabrizierten Tetraedern | Alexander Graham Bell | 1904 (Patent)

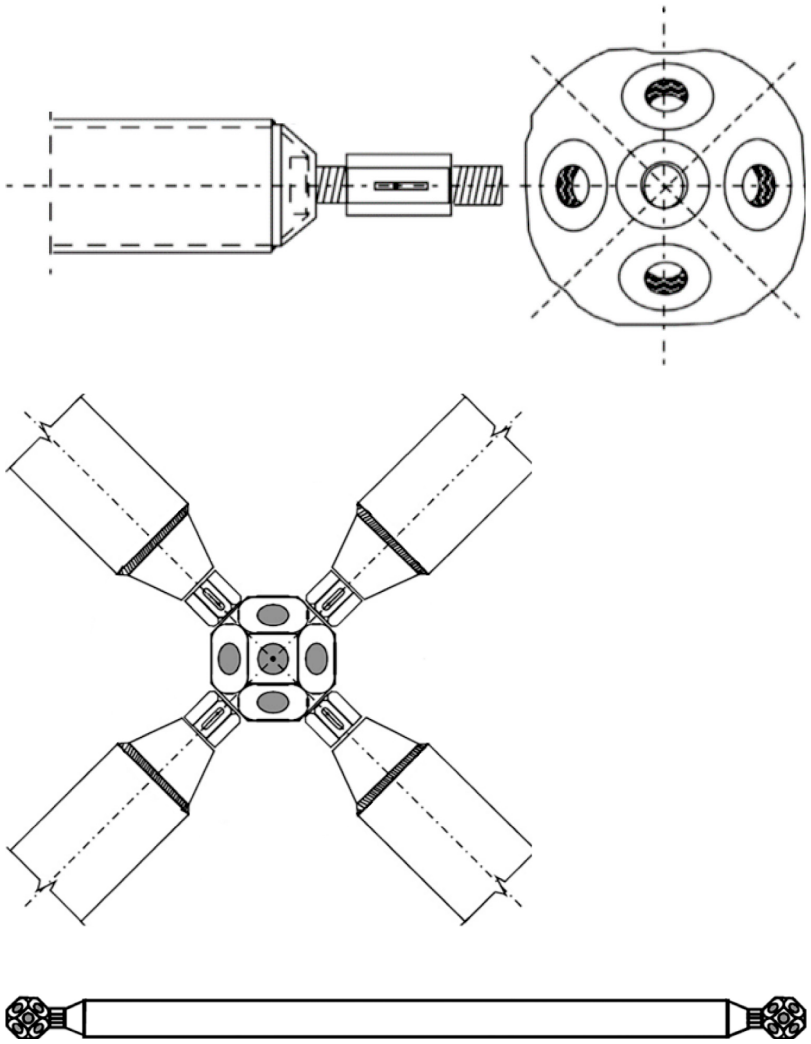
Raumfachwerk

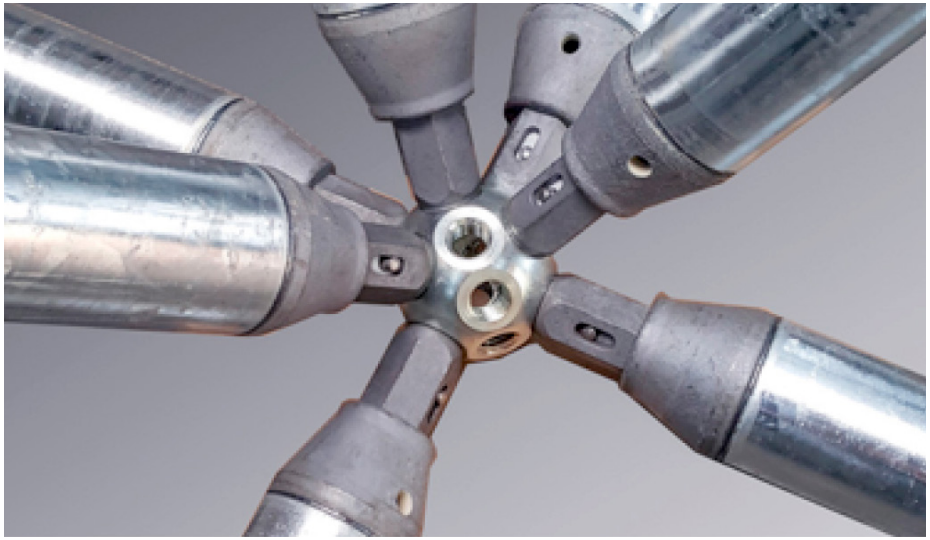




Verbunddrachen mit Raumfachwerk aus vorfabrizierten Tetraedern
Alexander Graham Bell | 1907 (Patent)

Raumfachwerk







System MERO (modulares System für Raumfachwerke)
Max Mengeringhausen (Ingenieur) | 1949

Auflagerkräfte von teilauskragenden Bauteilen

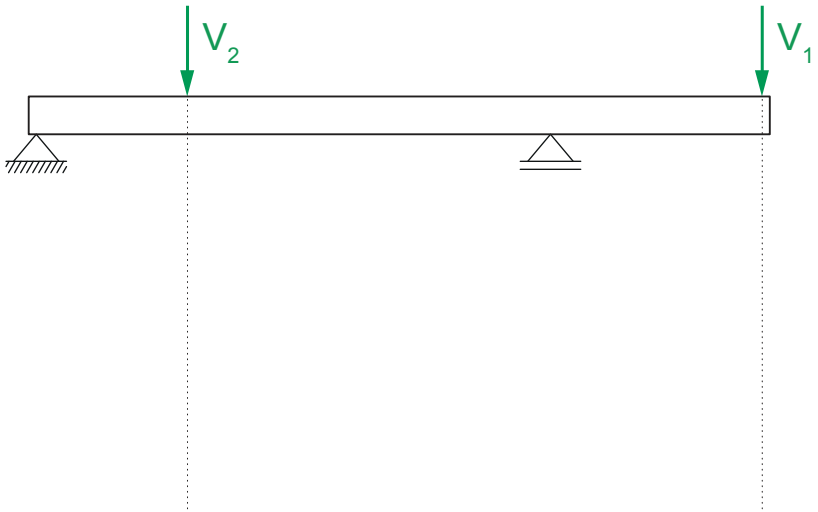
Unterscheidung zwischen zwei Fällen

FALL 1:
Einwirkende V_2 gross im Verhältnis zu V_1
→ Linkes Auflager auf Druck

z.B.

$V_1 = 7.5\,kN$

$V_2 = 15.0\,kN$

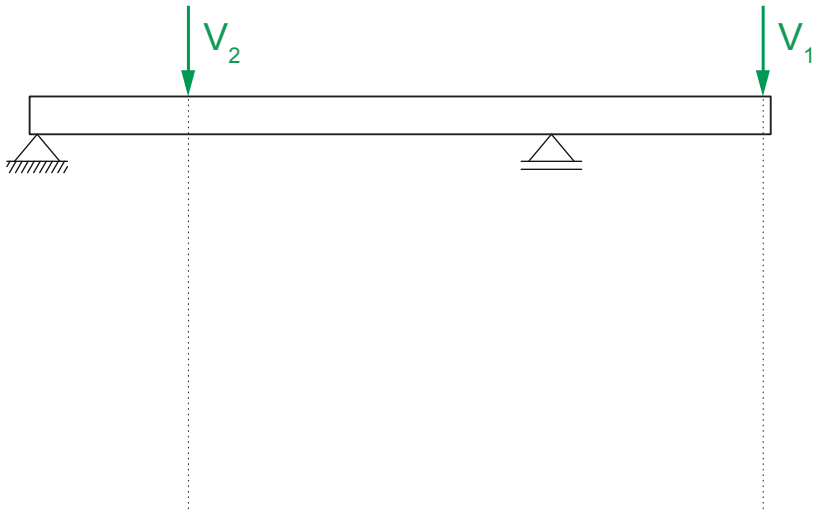


FALL 2:
Einwirkende V_2 klein im Verhältnis zu V_1
→ Linkes Auflager auf Zug

z.B.

$V_1 = 22.5\,kN$

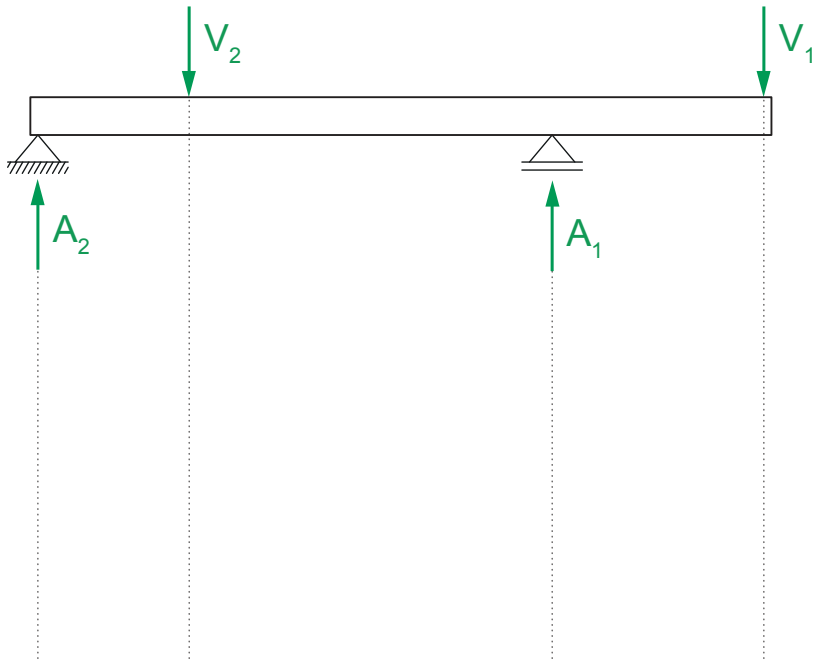
$V_2 = 6.0\,kN$



FALL 1: Einwirkende V_2 gross im Verhältnis zu V_1 → Auflagerkraft A_2 auf Druck

Ausgangslage

- $V_1 = 7.5\,kN$
- $V_2 = 15\,kN$

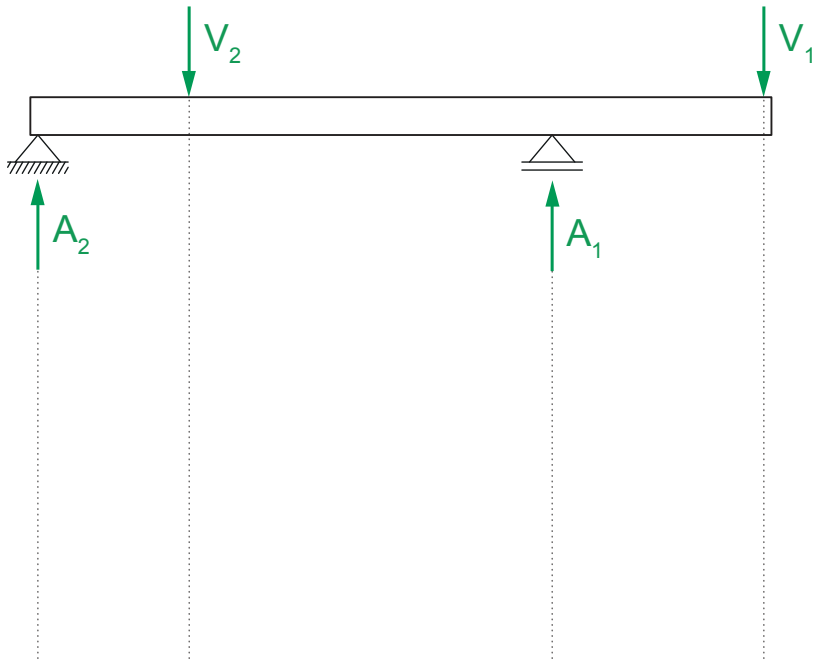


Lageplan

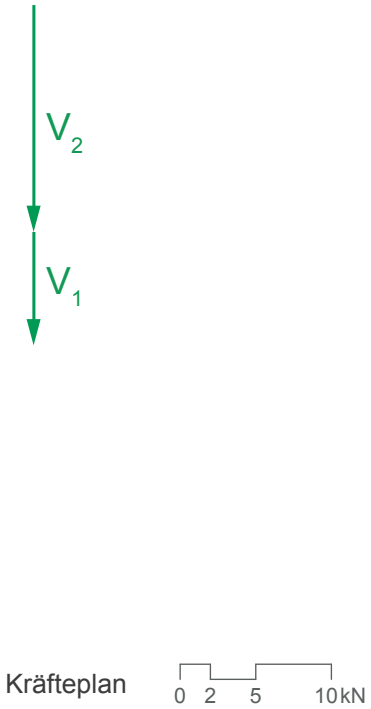
FALL 1: Einwirkende V_2 gross im Verhältnis zu V_1 → Auflagerkraft A_2 auf Druck

Vorgehen

- Einwirkende in Kräfteplan



Lageplan

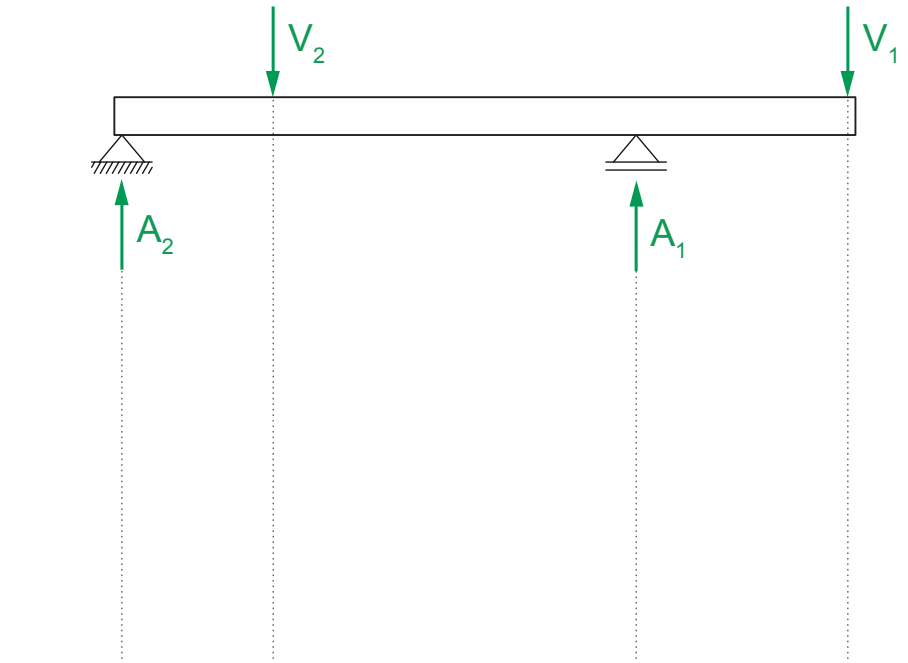


Kräfteplan

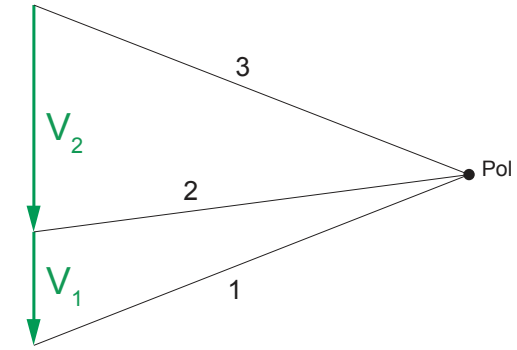
FALL 1: Einwirkende V_2 gross im Verhältnis zu V_1 → Auflagerkraft A_2 auf Druck

Vorgehen

- Wahl eines beliebigen Pols
- Einzeichnen der Seilpolygonkräfte im Kräfteplan



Lageplan

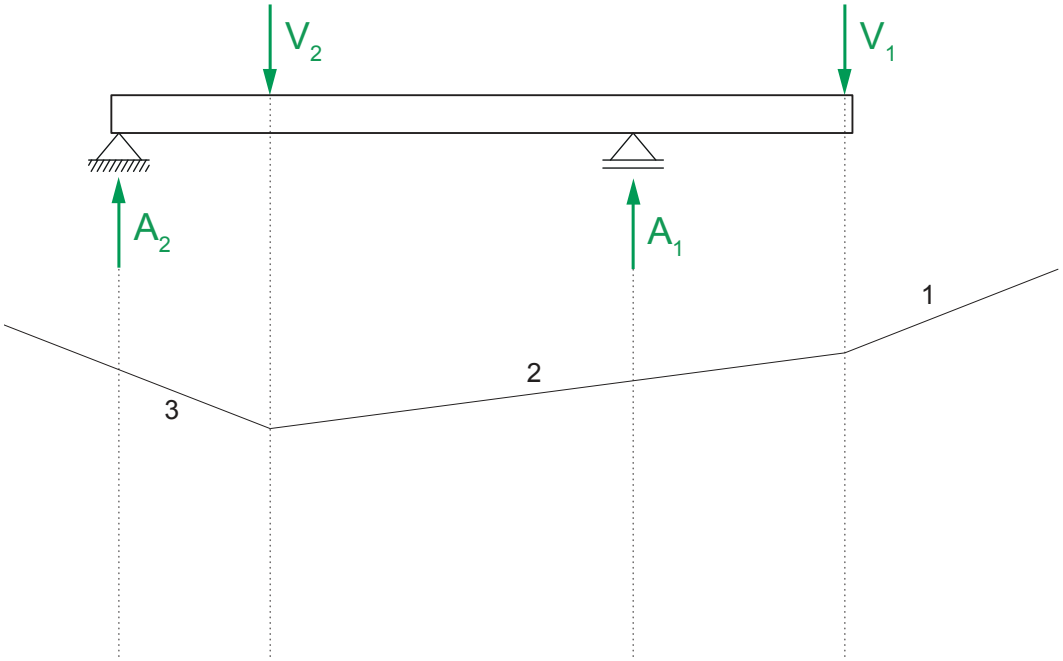


Kräfteplan 0 2 5 10kN

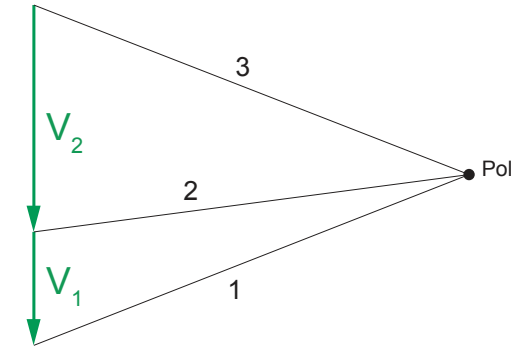
FALL 1: Einwirkende V_2 gross im Verhältnis zu V_1 → Auflagerkraft A_2 auf Druck

Vorgehen

- Übertragen der Seilpolygonkräfte in den Lageplan



Lageplan

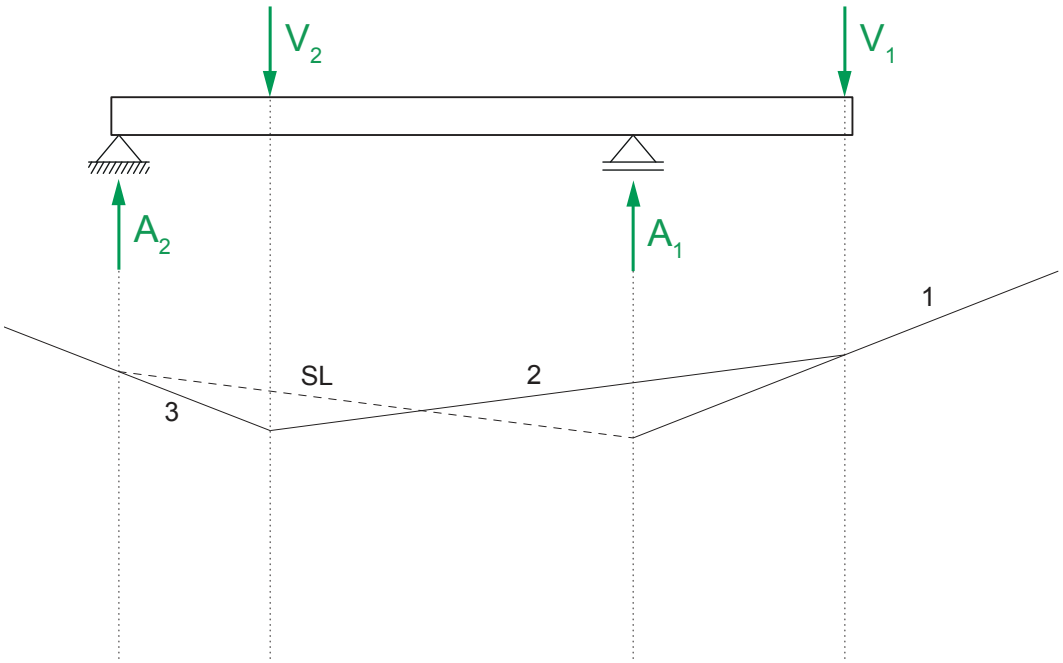


Kräfteplan 0 2 5 10kN

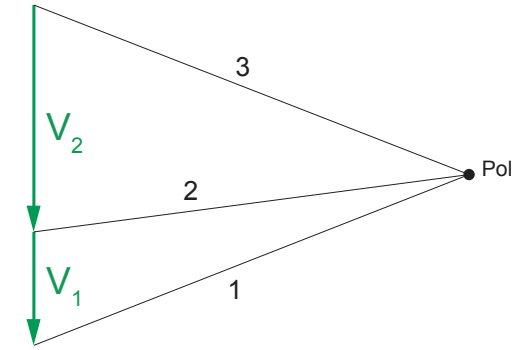
FALL 1: Einwirkende V_2 gross im Verhältnis zu V_1 → Auflagerkraft A_2 auf Druck

Vorgehen

- Schlusslinie in Lageplan einzeichnen:
  Vom Schnittpunkt von «1» und A_1 zum Schnittpunkt von «3» und A_2



Lageplan

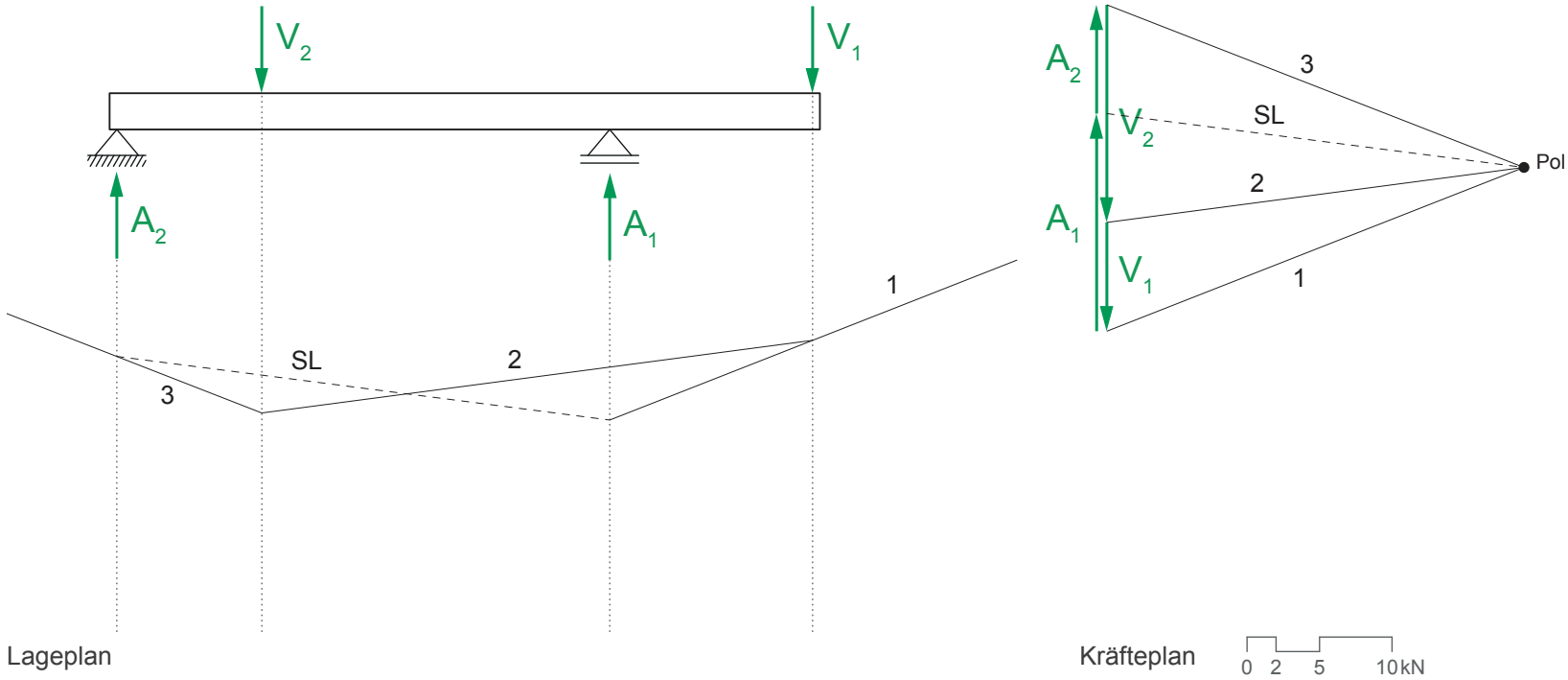


Kräfteplan 0 2 5 10kN

FALL 1: Einwirkende V_2 gross im Verhältnis zu V_1 → Auflagerkraft A_2 auf Druck

Vorgehen

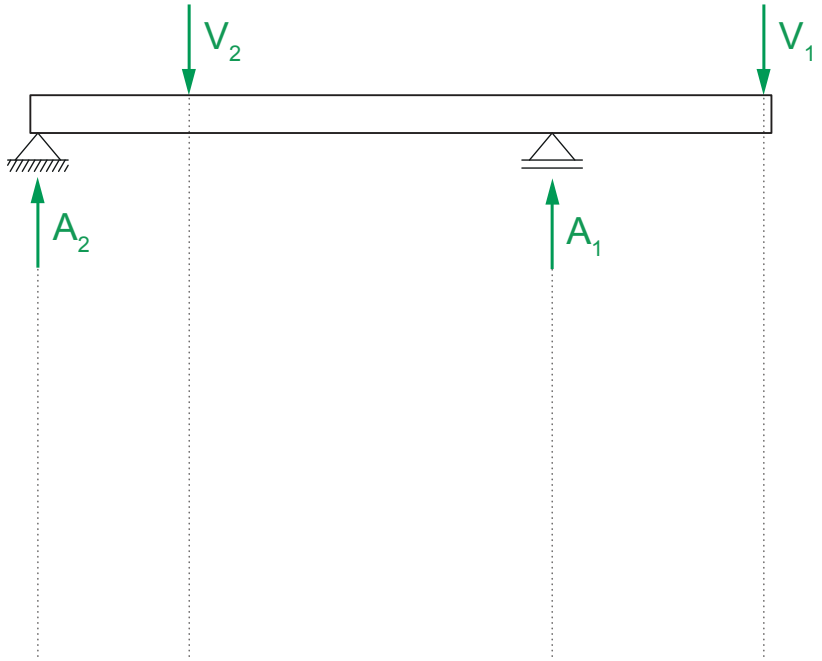
- Schlusslinie parallel in Kräfteplan übertragen:
  Daraus resultieren die Beträge der Auflagerkräfte A_1 und A_2



FALL 2: Einwirkende V_2 klein im Verhältnis zu V_1 → Auflagerkraft A_2 auf Zug

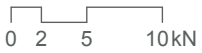
Ausgangslage

- V_1 = 22.5 kN
- V_2 = 6 kN



Lageplan

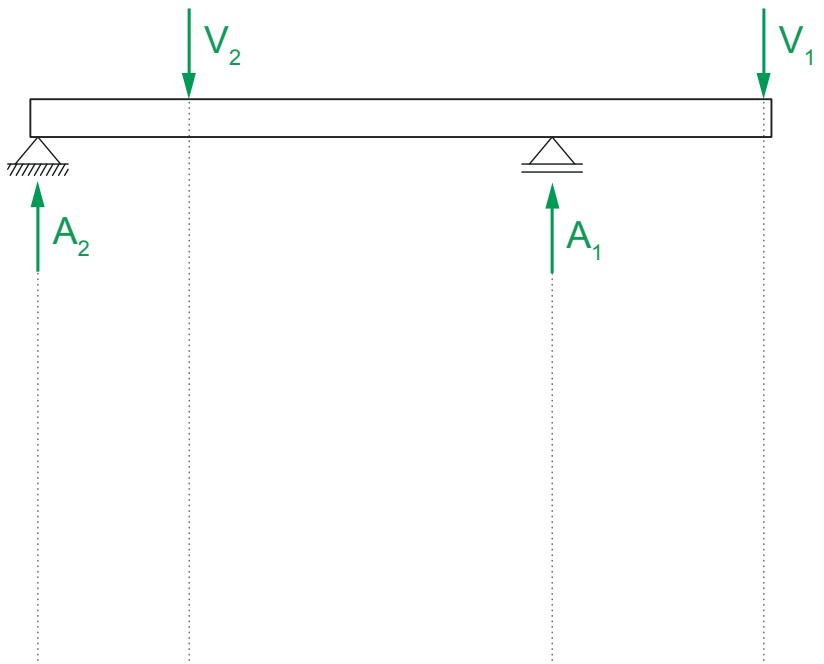
Kräfteplan



FALL 2: Einwirkende V_2 klein im Verhältnis zu V_1 → Auflagerkraft A_2 auf Zug

Vorgehen

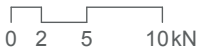
- Einwirkende in Kräfteplan



Lageplan



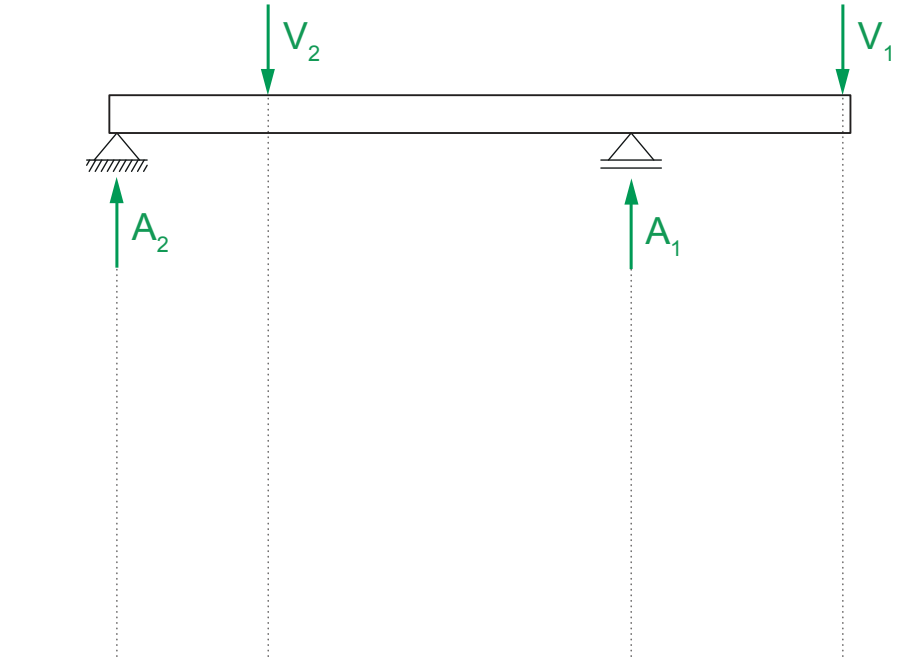
Kräfteplan



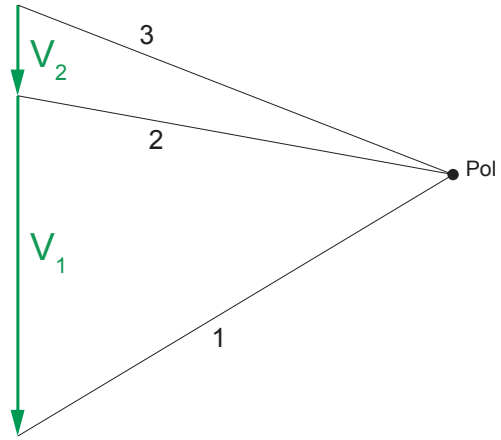
FALL 2: Einwirkende V_2 klein im Verhältnis zu V_1 → Auflagerkraft A_2 auf Zug

Vorgehen

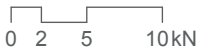
- Wahl eines beliebigen Pols
- Einzeichnen der Seilpolygonkräfte im Kräfteplan



Lageplan



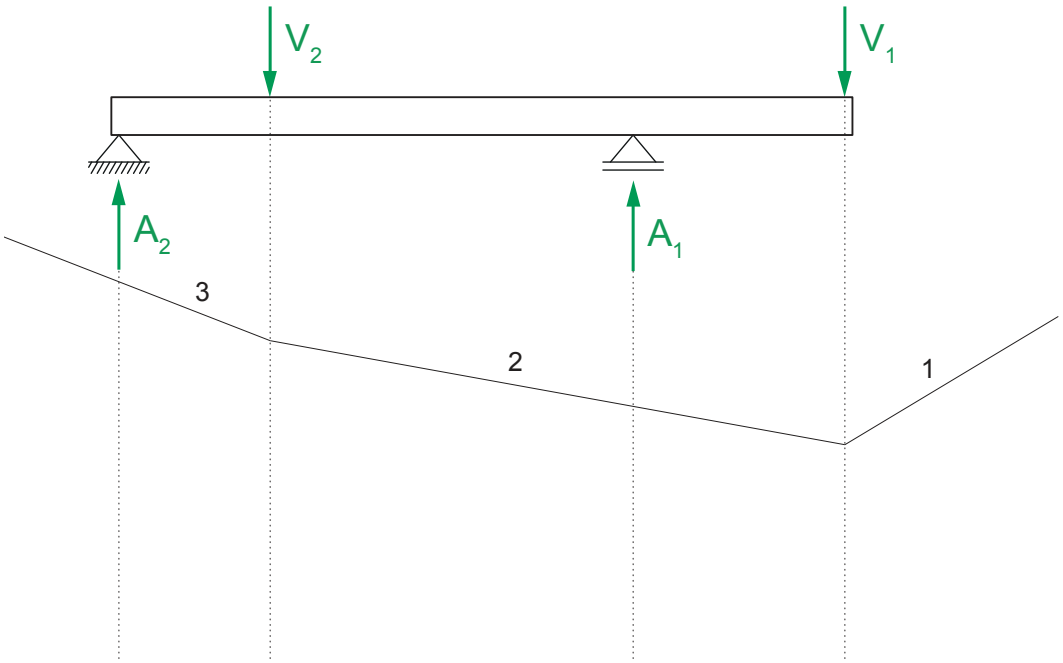
Kräfteplan



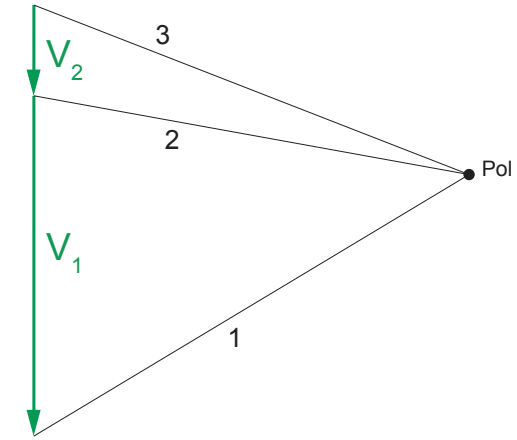
FALL 2: Einwirkende V_2 klein im Verhältnis zu V_1 → Auflagerkraft A_2 auf Zug

Vorgehen

- Übertragen der Seilpolygonkräfte in den Lageplan



Lageplan

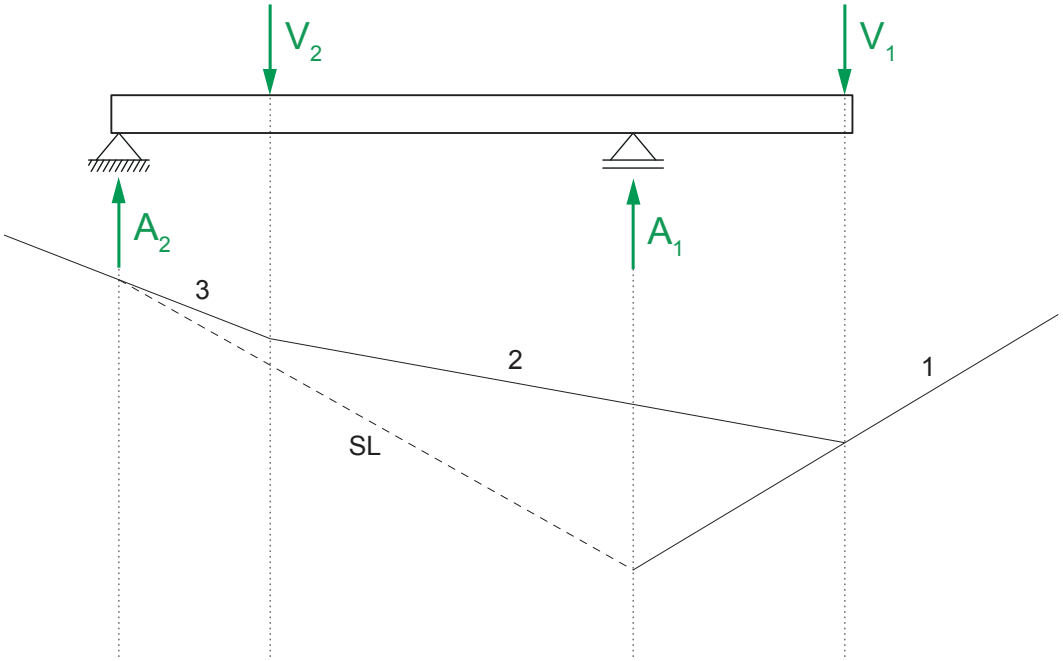


Kräfteplan 0 2 5 10kN

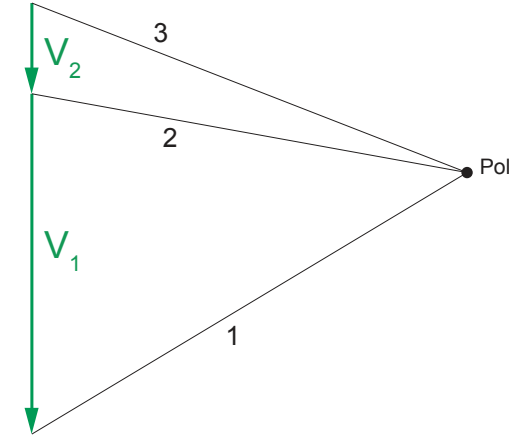
FALL 2: Einwirkende V_2 klein im Verhältnis zu V_1 → Auflagerkraft A_2 auf Zug

Vorgehen

- Schlusslinie in Lageplan einzeichnen:
  Vom Schnittpunkt von «1» und A_1 zum Schnittpunkt von «3» und A_2



Lageplan

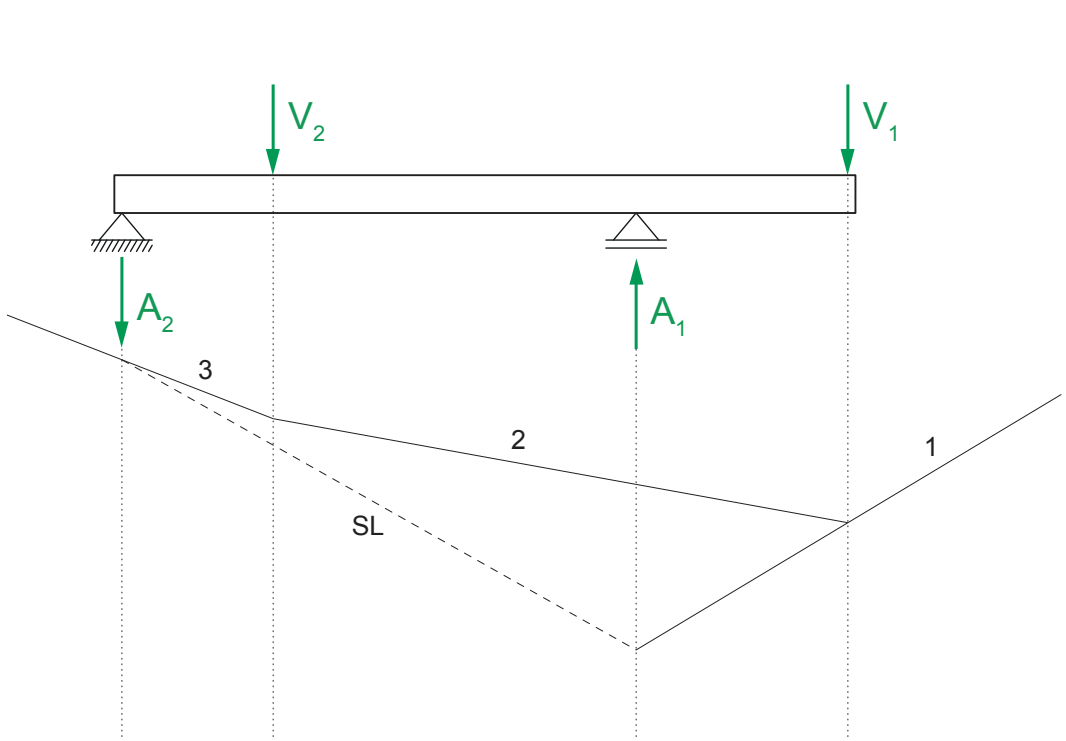


Kräfteplan 0 2 5 10kN

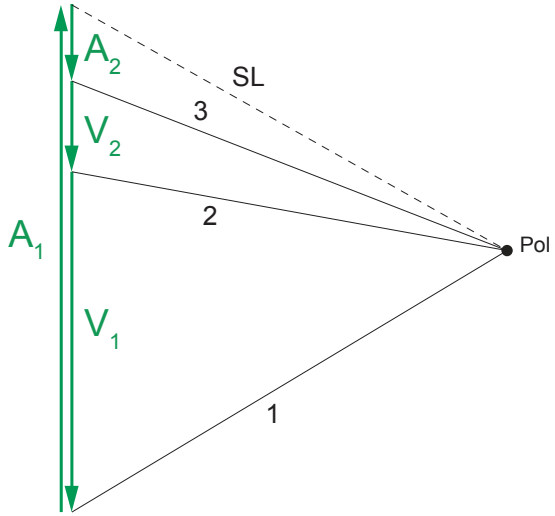
FALL 2: Einwirkende V_2 klein im Verhältnis zu V_1 → Auflagerkraft A_2 auf Zug

Vorgehen

- Schlusslinie parallel in Kräfteplan übertragen:
  Daraus resultieren die Beträge der Auflagerkräfte A_1 und A_2



Lageplan

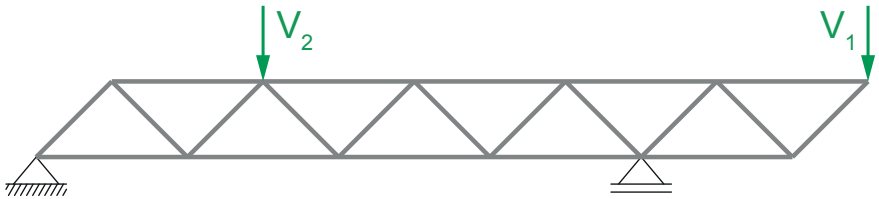


Kräfteplan 0 2 5 10 kN

Analyse eines Fachwerks mit Auskragung

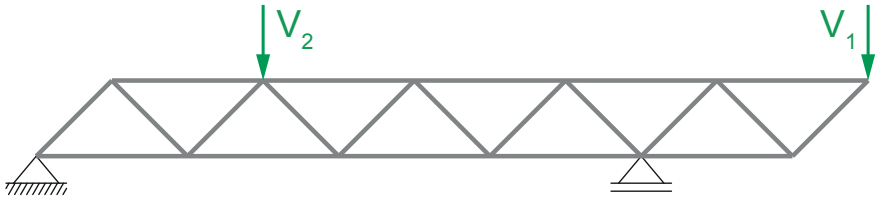
Analyseschritte die im Folgenden gezeigt werden:

- Ermittlung der Auflagerkräfte
- Qualitative Analyse:
  Identifikation von zug- und druckbeanspruchten Stäben anhand eines äquivalenten Bogen-Seil-Tragwerks
- Quantitative Analyse:
  Ermittlung der inneren Kräfte (Stabkräfte)



Ermittlung der Auflagerkräfte

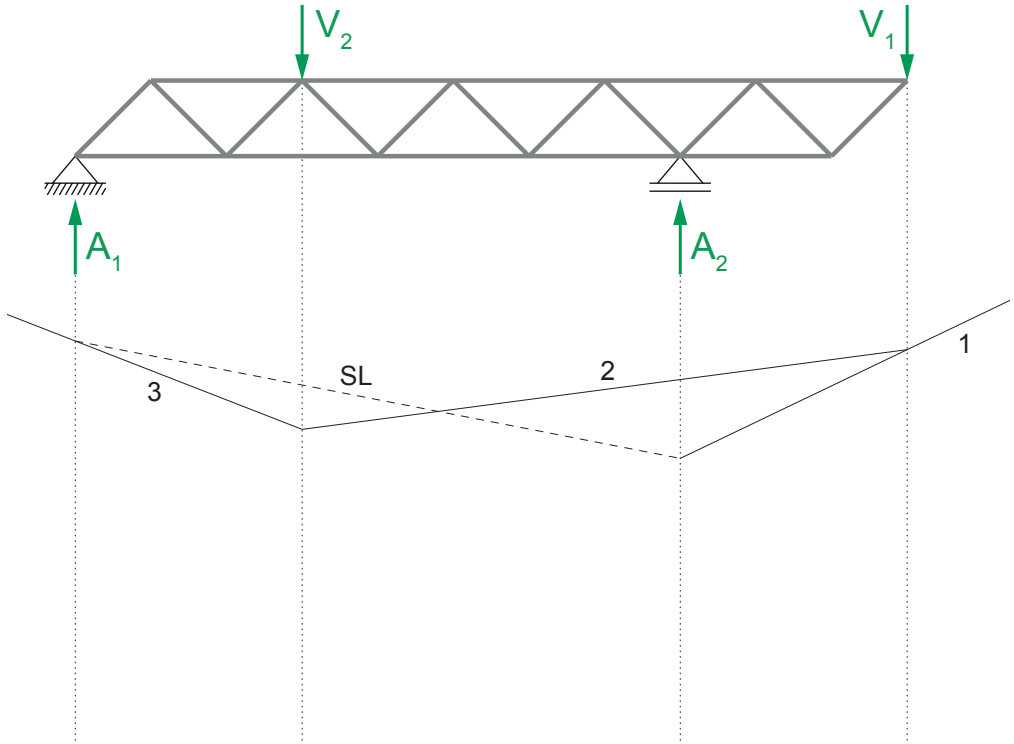
- Ausgangslage: Einwirkende auf das Fachwerk sowie die Auflagersituation.



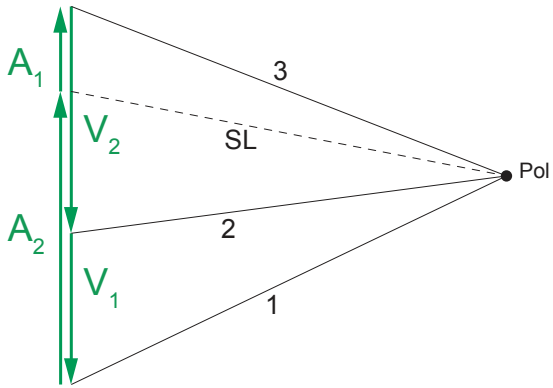
Lageplan

Ermittlung der Auflagerkräfte

- Mittels Seilpolygonverfahren wie anfangs dieser Vorlesunggezeigt



Lageplan

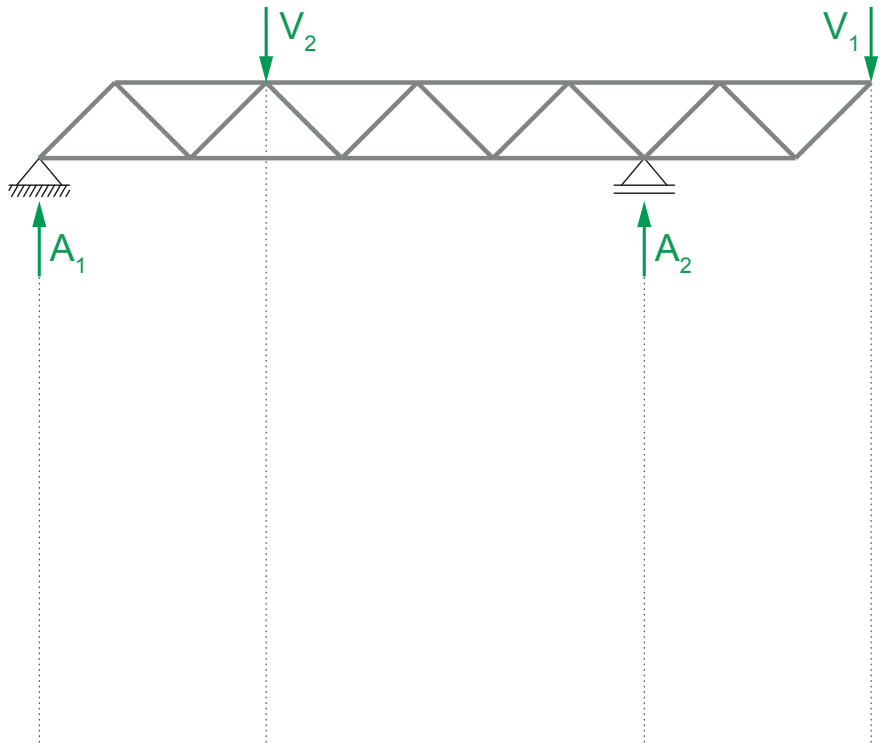


Kräfteplan 0 2 5 10kN

Identifikation von Zug- und Druckstäben anhand eines äquivalenten Bogen-Seil-Tragwerks

Entwicklung eines entsprechenden Bogen-Seil-Tragwerks für die Last- und Auflagersituation

- Ausgangslage: Einwirkende und Auflagerkräfte sind bekannt

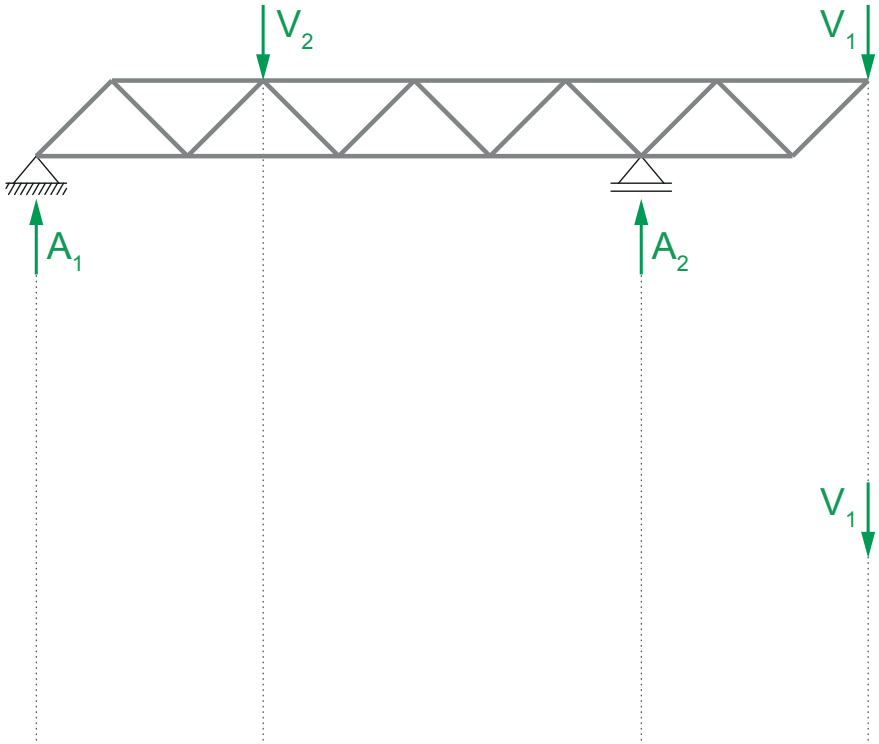


Lageplan

Identifikation von Zug- und Druckstäben anhand eines äquivalenten Bogen-Seil-Tragwerks

Entwicklung eines entsprechenden Bogen-Seil-Tragwerks für die Last- und Auflagersituation

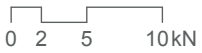
- Übertragung der Einwirkenden V_1 welche auf der Auskragung steht an die Position an welcher das Bogen-Seil-Tragwerk entstehen soll und in die Kräfteplan.



Lageplan



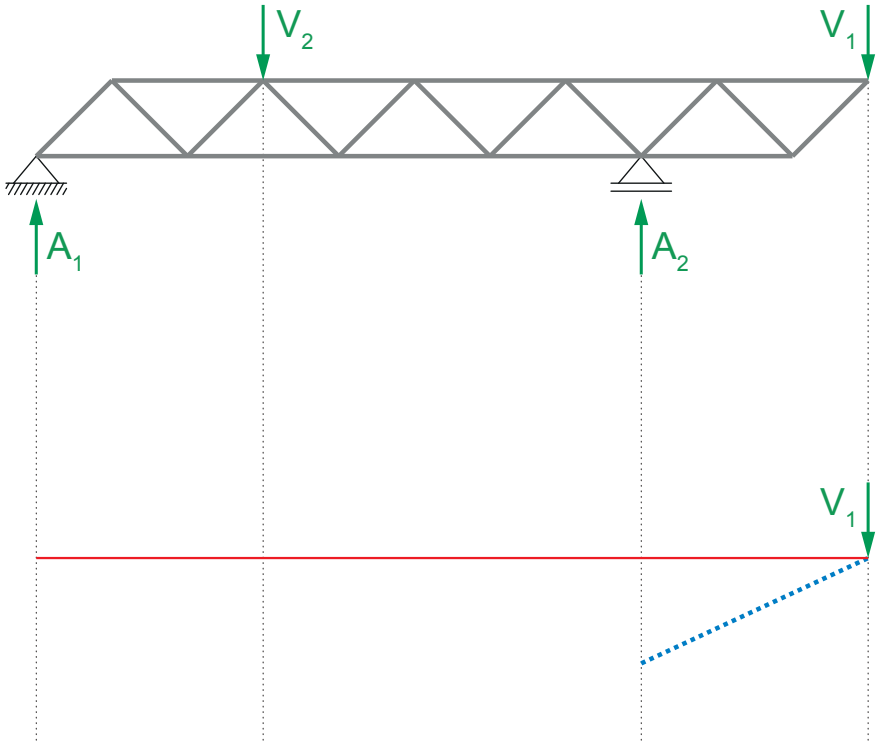
Kräfteplan



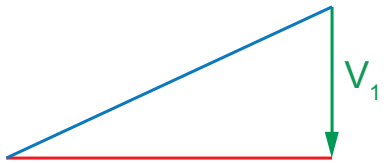
Identifikation von Zug- und Druckstäben anhand eines äquivalenten Bogen-Seil-Tragwerks

Entwicklung eines entsprechenden Bogen-Seil-Tragwerks für die Last- und Auflagersituation

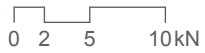
1. Horizontale Zugkraft im Lageplan sowie Wahl der Neigung der Druckkraft der Konsole
2. Konstruktion der Beträge der Kräfte im Kräfteplan mittels Knotengleichgewicht (geschlossenes Polygon)



Lageplan



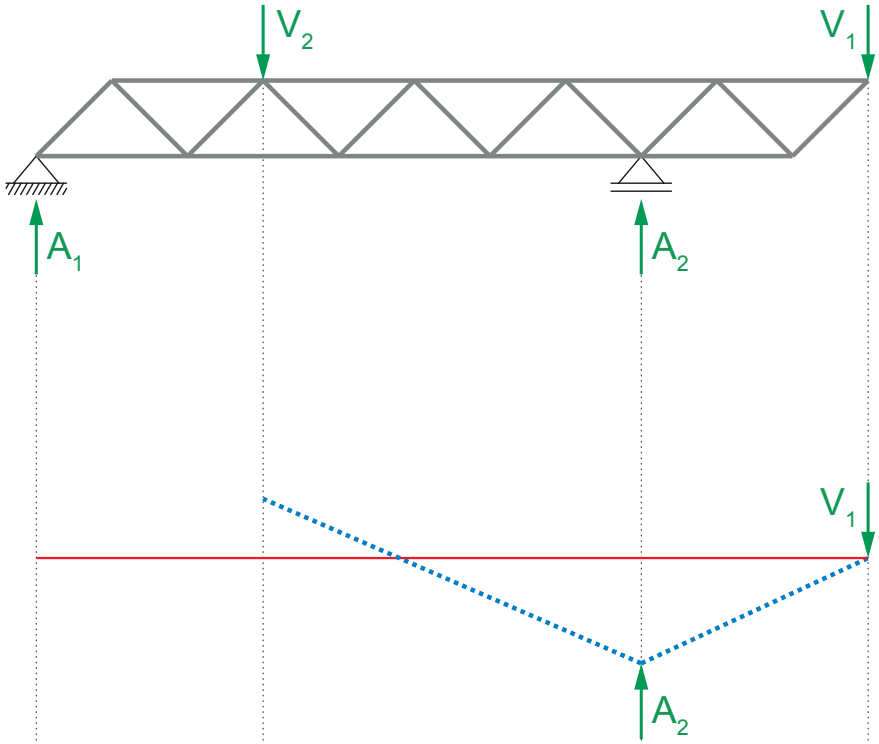
Kräfteplan



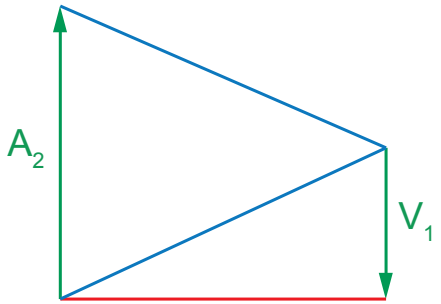
Identifikation von Zug- und Druckstäben anhand eines äquivalenten Bogen-Seil-Tragwerks

Entwicklung eines entsprechenden Bogen-Seil-Tragwerks für die Last- und Auflagersituation

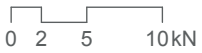
1. Übertragung von A_2 in den Kräfteplan
2. Daraus resultiert die Richtung und der Betrag der zweiten Druckkraft



Lageplan



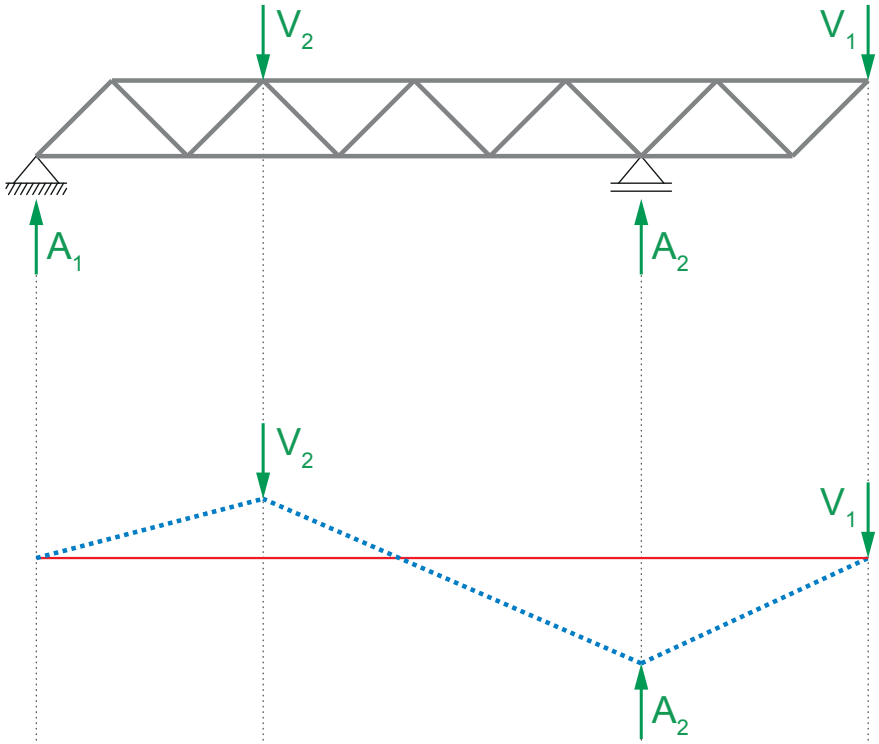
Kräfteplan



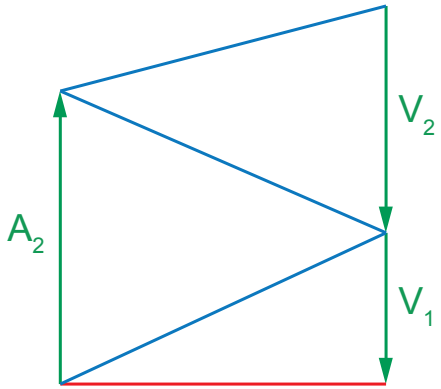
Identifikation von Zug- und Druckstäben anhand eines äquivalenten Bogen-Seil-Tragwerks

Entwicklung eines entsprechenden Bogen-Seil-Tragwerks für die Last- und Auflagersituation

1. Dritte Druckkraft kann direkt im Lageplan konstruiert werden
2. Bei Übertragung dieser Druckkraft und V_2 in den Kräfteplan muss sich ein geschlossenes Polygon ergeben (Kontrolle)



Lageplan

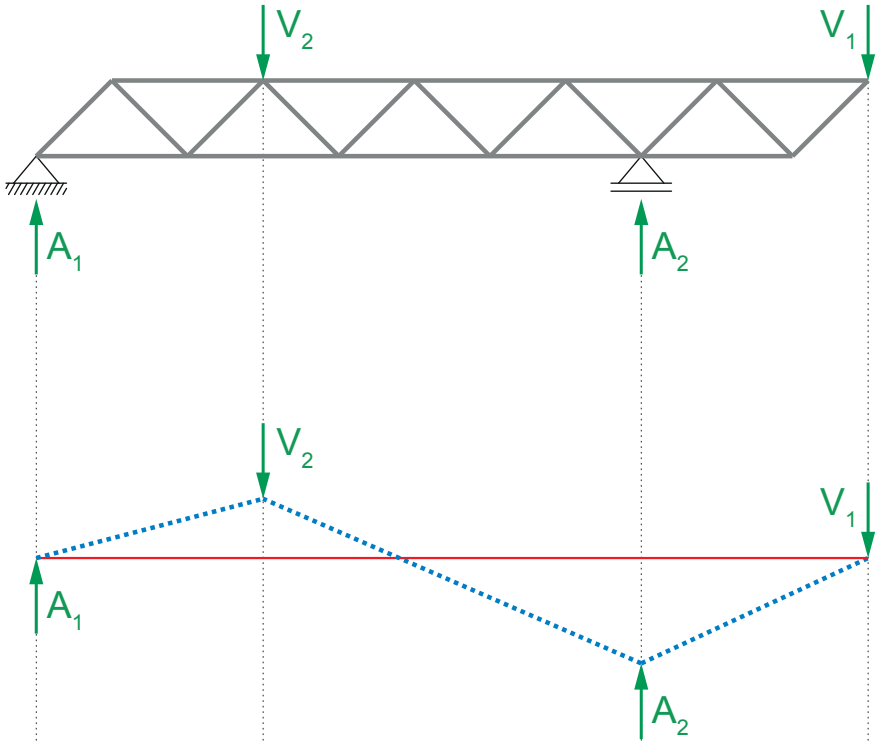


Kräfteplan 0 2 5 10kN

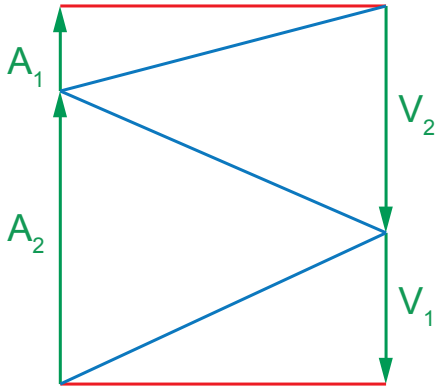
Identifikation von Zug- und Druckstäben anhand eines äquivalenten Bogen-Seil-Tragwerks

Entwicklung eines entsprechenden Bogen-Seil-Tragwerks für die Last- und Auflagersituation

- Bei Übertragung von A_1 und der Zugkraft in den Kräfteplan muss sich ebenfalls ein geschlossenes Polygon ergeben (Kontrolle)



Lageplan

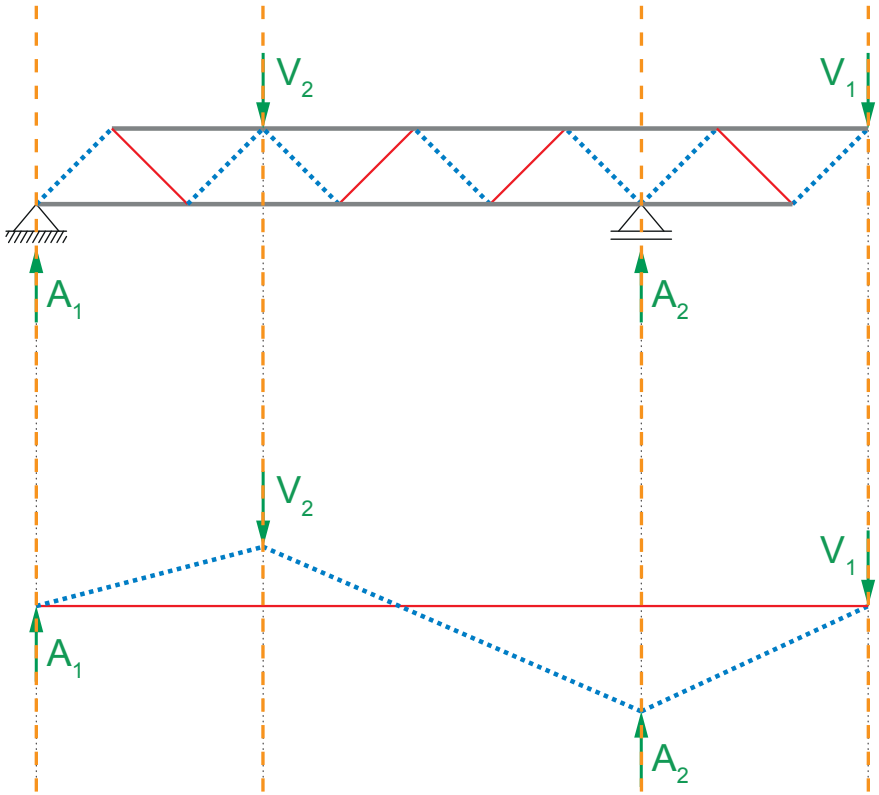


Kräfteplan 0 2 5 10kN

Identifikation von Zug- und Druckstäben anhand eines äquivalenten Bogen-Seil-Tragwerks

Bestimmung welche FÜLLSTÄBE zug- resp. druckbeansprucht sind

- Vorraussetzung: Direktes untereinanderzeichnen von Fachwerk und Bogen-Seil-Tragwerk



Lageplan

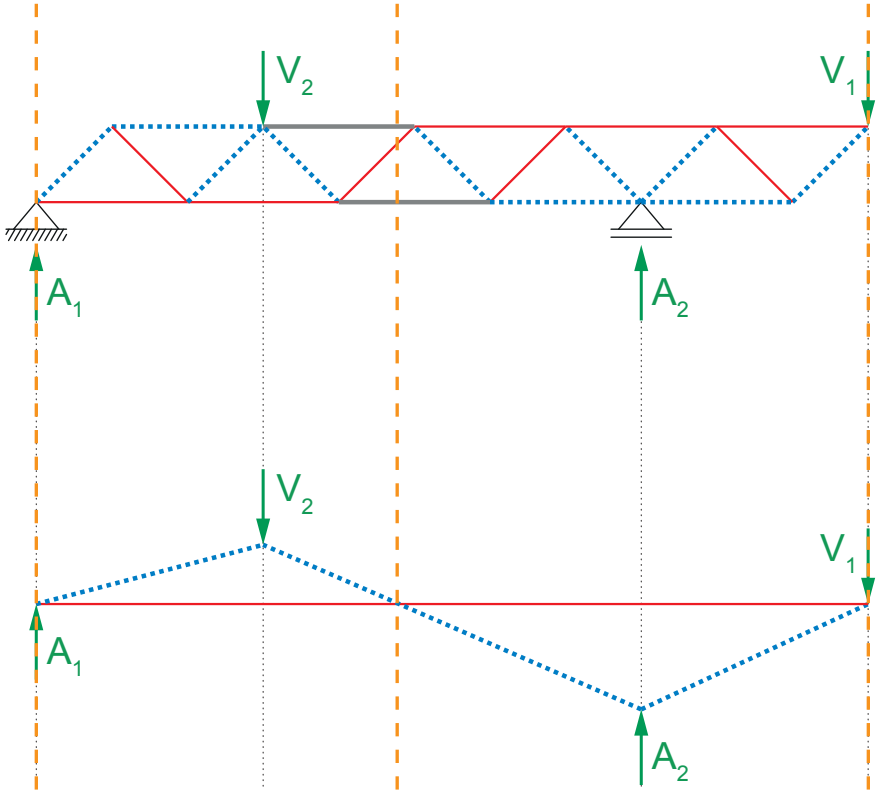
Füllstäbe welche in die selbe Richtung geneigt sind wie die Druckkraft an gleicher Stelle im Bogen-Seil-Tragwerk haben eine innere Druckkraft.

Die übrigen Füllstäbe haben eine innere Zugkraft (gilt nur wenn an einem Knoten genau zwei Füllstäbe angeschlossen sind).

Identifikation von Zug- und Druckstäben anhand eines äquivalenten Bogen-Seil-Tragwerks

Bestimmung welche GURTSTÄBE zug- resp. druckbeansprucht sind

- Vorraussetzung: Direktes untereinanderzeichnen von Fachwerk und Bogen-Seil-Tragwerk



Lageplan

Gurtstab der vollständig in einem Bereich des Bogen-Seil-Tragwerks liegt in welchem die Druckkraft oberhalb der Zugkraft verläuft:

Obergurtstab > Druckkraft

Untergurtstab > Zugkraft

Gurtstab der vollständig in einem Bereich des Bogen-Seil-Tragwerks liegt in welchem die Zugkraft oberhalb der Druckkraft verläuft:

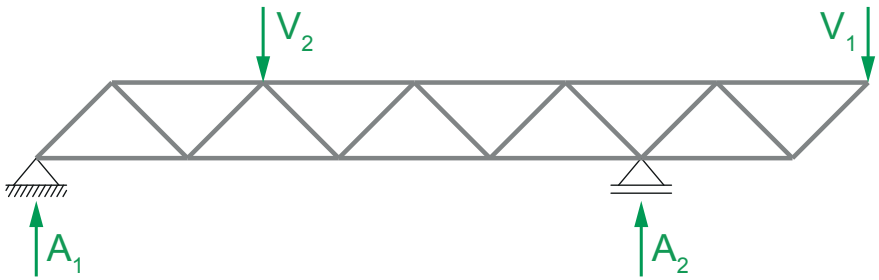
Obergurtstab > Zugkraft

Untergurtstab > Druckkraft

Ermittlung der inneren Kräfte (Stabkräfte)

Knotenweise Bestimmung der inneren Kräfte der Stäbe

- Ausgangslage: Einwirkende und Auflagerkräfte sind bekannt

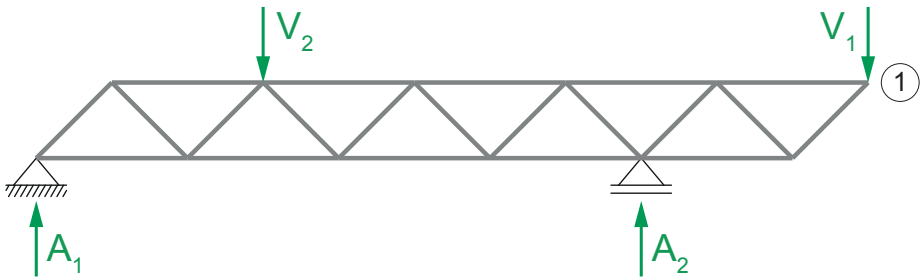


Lageplan

Ermittlung der inneren Kräfte (Stabkräfte)

Knotenweise Bestimmung der inneren Kräfte der Stäbe

- Beginn am Knoten 1, an welchem die Einwirkende V_1 angreift.
- Hier können mittels Knotengleichgewicht die Beträge der zwei Fachwerkstäbe bestimmt werden.

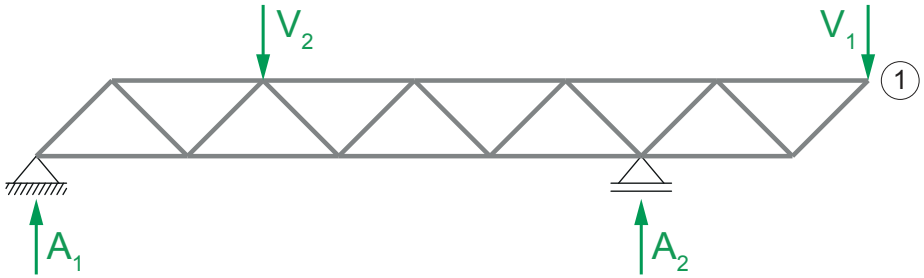


Lageplan

Ermittlung der inneren Kräfte (Stabkräfte)

Knotenweise Bestimmung der inneren Kräfte der Stäbe

- Graphisches Knotengleichgewicht: Übertragung der Kräfte (hier nur eine) von welchen Betrag und Richtung bekannt sind in den Kräfteplan.



Lageplan



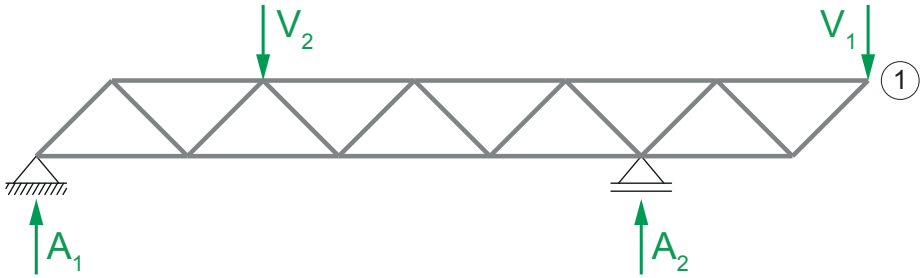
Kräfteplan



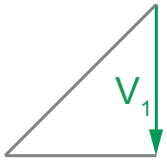
Ermittlung der inneren Kräfte (Stabkräfte)

Knotenweise Bestimmung der inneren Kräfte der Stäbe

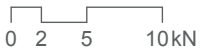
- Graphisches Knotengleichgewicht: Parallelübertragung der Wirkungslinien der beiden unbekannten Stabkräfte in den Kräfteplan, so dass ein geschlossenes Polygon entsteht → nun sind die unbekannten Beträge ermittelt.



Lageplan



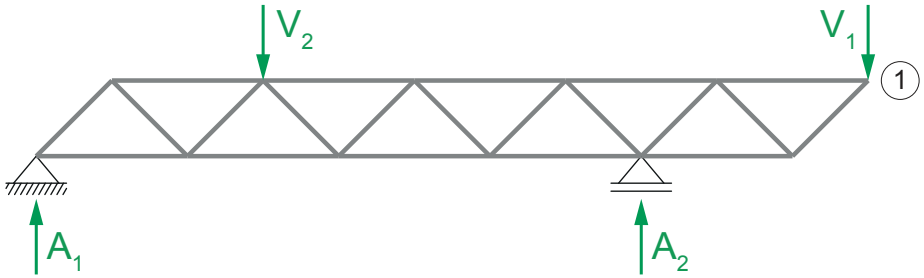
Kräfteplan



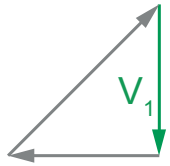
Ermittlung der inneren Kräfte (Stabkräfte)

Knotenweise Bestimmung der inneren Kräfte der Stäbe

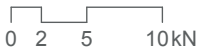
- Graphisches Knotengleichgewicht: Ergänzung der Pfeilspitzen der Vektoren im Kräfteplan so dass ein geschlossener Vektorzug entsteht → nun sind die Richtungen der Stabkräfte bekannt



Lageplan



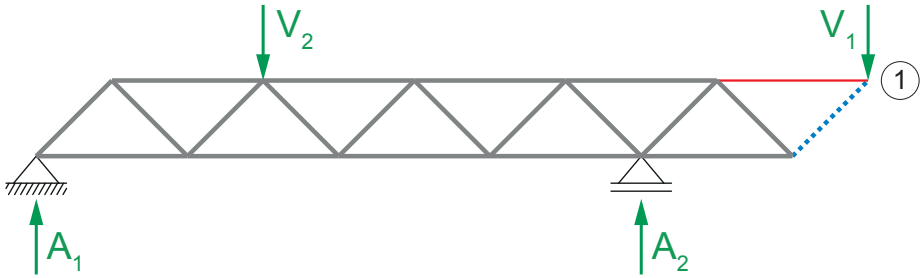
Kräfteplan

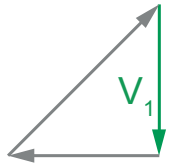


Ermittlung der inneren Kräfte (Stabkräfte)

Knotenweise Bestimmung der inneren Kräfte der Stäbe

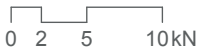
- Graphisches Knotengleichgewicht: Aus der Richtung der Vektoren kann im Lageplan ermittelt werden ob die Stabkraft Zug oder Druck ist (Zug: Vektor zeigt vom Knoten weg; Druck: Vektor zeigt zum Knoten hin)





Lageplan

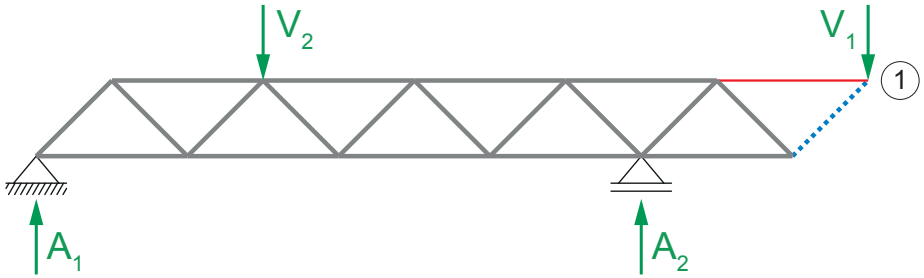
Kräfteplan

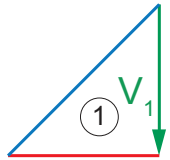


Ermittlung der inneren Kräfte (Stabkräfte)

Knotenweise Bestimmung der inneren Kräfte der Stäbe

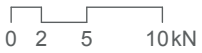
- Graphisches Knotengleichgewicht: Aus der Richtung der Vektoren kann im Lageplan ermittelt werden ob die Stabkraft Zug oder Druck ist (Zug: Vektor zeigt vom Knoten weg; Druck: Vektor zeigt zum Knoten hin)





Lageplan

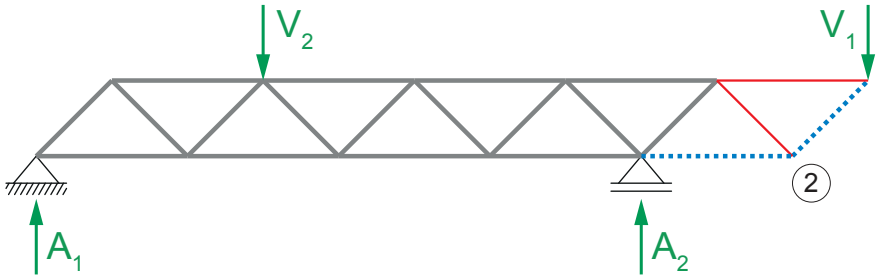
Kräfteplan



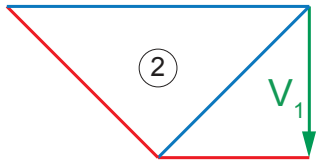
Ermittlung der inneren Kräfte (Stabkräfte)

Knotenweise Bestimmung der inneren Kräfte der Stäbe

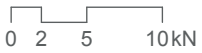
- Gleiches Verfahren für Knoten 2 (Am Knoten darf es nur zwei unbekannte Stabkräfte geben)



Lageplan



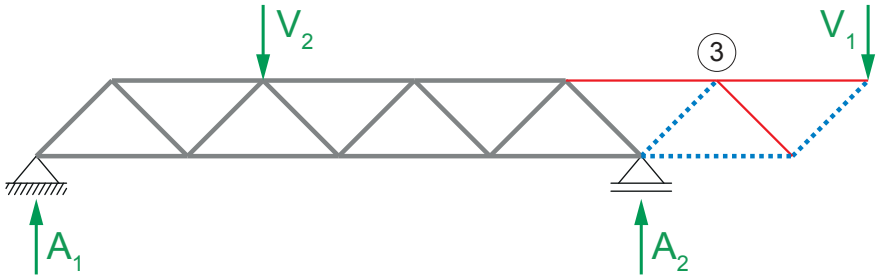
Kräfteplan



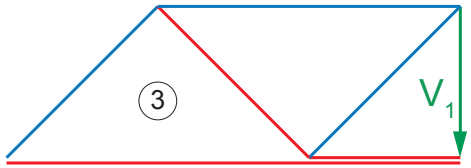
Ermittlung der inneren Kräfte (Stabkräfte)

Knotenweise Bestimmung der inneren Kräfte der Stäbe

- Gleiches Verfahren für Knoten 3 (Am Knoten darf es nur zwei unbekannte Stabkräfte geben)



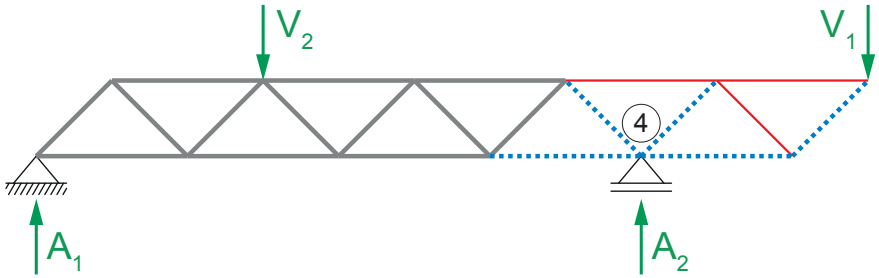
Lageplan



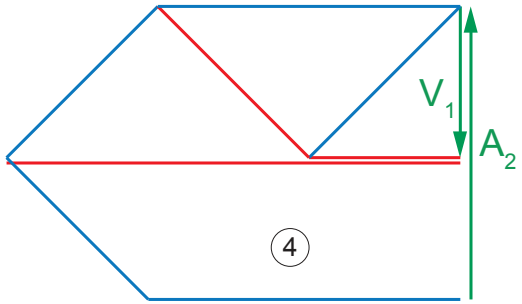
Kräfteplan



Ermittlung der inneren Kräfte (Stabkräfte)



Lageplan



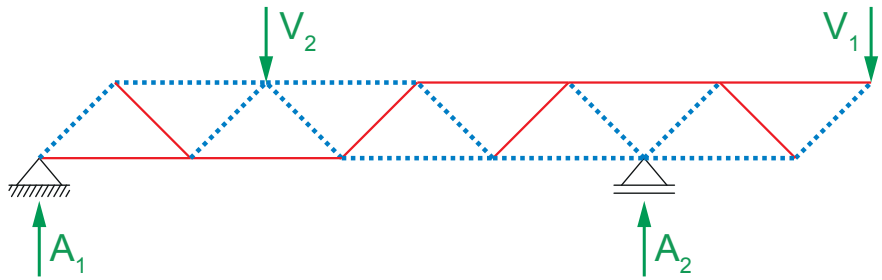
Kräfteplan



Ermittlung der inneren Kräfte (Stabkräfte)

Knotenweise Bestimmung der inneren Kräfte der Stäbe

- ... bis alle inneren Kräfte bestimmt sind.



Lageplan